Θεωρία Μέτρου - Τελικές επαναληπτικές ασκήσεις

1. a) Με ποιούς τρόπους μπορούμε να δείξουμε ότι ένα σύνολο είναι Lebesgue-μετρήσιμο;

   b) Σάς δίνεται ότι, για κάθε $A,B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι $A\times B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Δείξτε ότι, για κάθε $A,B \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι $A\times B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στη $\mathscr{B}([0,1])$, με $\mu(I)=\frac{1}{2}$ για κάθε $I\in\mathscr{B}([0,1])$ με $\lambda(I)=\frac{1}{2}$. Δείξτε ότι $\mu=\lambda$ στη $\mathscr{B}([0,1])$.

3. Υπολογίστε, με λεπτομέρεια, το

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{1/2}(1-\sqrt{sinx})^n\cos x\,dx.$$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη, με την ιδιότητα ότι

$$\int_{[0,x]} f d\lambda = 0 \text{ για κάθε } x>0 \qquad \text{και} \qquad \int_{[x,0]} f d\lambda = 0 \text{ για κάθε } x<0.$$

   Δείξτε ότι $f=0$ λ-σ.π.

5. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $f_n:(X,\mathscr{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$ μετρήσιμη για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και $f:(X,\mathscr{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$ επίσης μετρήσιμη. Έστω ότι

$$\|f_n-f\|_p\to 0 \quad \text{καθώς } n\to+\infty,$$

   για κάποιο $p\in[1,+\infty)$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$f_{k_n}\to f_n \text{ κ.σ. } \mu\text{-σ.π.}$$

6. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου.

   a) Δείξτε ότι, αν $f\in L^1(\mu)\cap L^3(\mu)$, τότε $f\in L^2(\mu)$.

   b) Γενικότερα, έστω $1\le p_1<p_2<p_3<+\infty$. Δείξτε ότι, αν $f\in L^{p_1}(\mu)\cap L^{p_3}(\mu)$, τότε $f\in L^{p_2}(\mu)$.