Θεωρία Μέτρου 2024-25 - Φυλλάδιο 1

Προθεσμία παράδοσης: 8 Νοεμβρίου 2024. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. a) Έστω $X \neq \emptyset$. Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων υποσυνόλων του X με την ιδιότητα ότι $X = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Έστω $\mathscr{F} := \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$. (Με άλλα λόγια, η $\mathscr{F}$ είναι μία διαμέριση του X.) Δείξτε ότι
$$\sigma(\mathscr{F}) = \left\{ \bigcup_{n \in I} A_n : \, I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

   b) Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Έστω $a \neq b$ δύο στοιχεία του X.

   (i) Ορίζουμε
$$\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{A} : \text{ ή } a, b \in A \text{ ή } a, b \notin A\}.$$
   Δείξτε ότι η $\mathscr{C}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχεται στην $\mathscr{A}$.

   (ii) Έστω ότι μία οικογένεια $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ είναι τέτοια ώστε $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{F})$, και ώστε, για κάθε $F \in \mathscr{F}$, να ισχύει ότι ή $a, b \in F$ ή $a, b \notin F$. Δείξτε ότι τότε και για κάθε $A \in \mathscr{A}$ έχουμε ότι ή $a, b \in A$ ή $a, b \notin A$.

2. (Σε αυτή την άσκηση θα δείξουμε ότι κάθε σ-άλγεβρα ή είναι υπεραριθμήσιμη ή έχει πληθάριθμο ίσο με δύναμη του 2.) Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα στον X. Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε
$$M_x := \bigcap_{A \in \mathscr{A} : \, x \in A} A.$$

   a) Δείξτε ότι, για κάθε $x \neq y$ στον X, έχουμε ότι ή $M_x = M_y$ ή $M_x \cap M_y = \emptyset$.

   b) Δείξτε ότι όλα τα διαφορετικά στοιχεία της μορφής M_x, $x \in X$, αποτελούν διαμέριση του X.

   c) Συμβολίζουμε με $\mathscr{F} := \{M_x : x \in X\}$. Έστω ότι $\#\mathscr{F} < +\infty$. Δείξτε ότι $\#\mathscr{A} = 2^{\#\mathscr{F}}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (1a)).

   d) Έστω ότι $\#\mathscr{A} = +\infty$. Δείξτε ότι η $\mathscr{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη. (Υποθέστε ότι είναι αριθμήσιμη. Πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις παραπάνω ιδέες;)

3. a) Έστω μ μέτρο στον $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε η απόσταση $|x - y|$ να είναι άρρητη.

   b) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, και $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathscr{A}$ με $\mu(A_n) \geq 1/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) \geq 1/2$.

4. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για οποιαδήποτε $A, B \subseteq X$, $A \triangle B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.

   a) Έστω $A, B \in \mathscr{A}$ με $\mu(A \triangle B) = 0$. Δείξτε ότι $\mu(A) = \mu(B)$.

b) Έστω επιπλέον ότι ο $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, και $A \in \mathscr{A}$. Έστω $B \subseteq X$ με $\mu(A \triangle B) = 0$. Δείξτε ότι $B \in \mathscr{A}$ (και άρα $\mu(B) = \mu(A)$).

c) Εδώ υποθέτουμε ότι $\mu(X) < +\infty$ (χωρίς το μ να είναι αναγκαστικά πλήρες). Δείξτε ότι η απεικόνιση $d : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ με

$$d(A, B) := \mu(A \triangle B) \quad \text{για κάθε } A, B \in \mathscr{A}$$

είναι ψευδομετρική. (Δηλαδή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της μετρικής, εκτός ίσως από την $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$).

5. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μέτρο μ είναι *ημιπεπερασμένο* αν:

"Κάθε $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = +\infty$ έχει υποσύνολο $B \in \mathscr{A}$ με $0 < \mu(B) < +\infty$."

a) Δείξτε ότι, αν το μ είναι ημιπεπερασμένο και $\mu(X) = +\infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ με $M \leq \mu(A) < +\infty$. (Δηλαδή, υπάρχουν σύνολα με οσοδήποτε μεγάλο πεπερασμένο μέτρο μ.)

(Υπόδειξη: Ορίζουμε $\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{A} : 0 < \mu(A) < +\infty\}$, και $a := \sup_{A \in \mathscr{C}} \mu(A)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $a = +\infty$. Υποθέστε ότι $a < +\infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ στην $\mathscr{C}$ με $\mu(A_n) \to a$. Βρείτε τρόπο να καταλήξετε σε άτοπο.)

b) Κατασκευάστε ένα μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ που *δεν* είναι ημιπεπερασμένο.

c) Δείξτε ότι, αν ο $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος, τότε το μ είναι ημιπεπερασμένο.

6. Έστω $X \neq \emptyset$, και $(Y, \mathscr{B})$ μετρήσιμος χώρος. Έστω $f : X \to Y$.

a) Δείξτε ότι η $\mathscr{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

b) Ας υποθέσουμε ότι επιπλέον η f είναι 1-1 και επί. Έστω μ μέτρο στον $(Y, \mathscr{B})$. Ορίζουμε $\mu_* : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\mu_*(A) := \mu(f(A)), \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{A}.$$

Δείξτε ότι το μ_* είναι μέτρο στο X. (Το μ_* αποκαλείται pull-back μέτρο.)