Θεωρία Μέτρου 2024-25 - Φυλλάδιο 2

Προθεσμία παράδοσης: 2 Δεκεμβρίου 2024. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι *μεγάλο* αν έχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία έξω από κάθε φραγμένο διάστημα. Ορίζουμε $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ με
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν το } A \text{ είναι αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν το } A \text{ είναι υπεραριθμήσιμο αλλά όχι μεγάλο,} \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι μεγάλο.} \end{cases}$$
Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

2. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο αν και μόνο αν
$$b - a = \lambda^*\big((a,b) \cap A\big) + \lambda^*\big((a,b) \setminus A\big) \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ με $\lambda\big(A \cap (a,b)\big) > \frac{99}{100} \cdot (b - a)$.

4. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
   a) Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με θετικό μέτρο Lebesgue περιέχει διάστημα.
   b) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-μετρήσιμο. Τότε, $\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό υποσύνολο του } A\}$.
   c) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-μετρήσιμο. Τότε, $\lambda(A) = \inf\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό υπερσύνολο του } A\}$.
   d) Έστω $A \subseteq [0,1]$ με την ιδιότητα ότι $\lambda(A^\circ) = \lambda(\overline{A})$. Τότε, το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

5. Έστω A, B Lebesgue-μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ώστε το $A + B$ να είναι και αυτό Lebesgue-μετρήσιμο. Δείξτε ότι $\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$.

   (Υπόδειξη: Σκεφτείτε πρώτα την περίπτωση που τα A, B είναι φραγμένα. Μπορείτε να βρείτε δύο αντίτυπα των A, B μέσα στο $A + B$, που να είναι πρακτικά ξένα;)

6. Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο, κυρτό[1] σύνολο. Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι να δειχθεί ότι το K είναι Lebesgue-μετρήσιμο. Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$, και αντίστοιχα με λ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$.
   a) Έστω $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ και $s > 0$. Δείξτε ότι $\lambda(sA) = s^2 \lambda(A)$ (όπου $sA := \{s \cdot a : a \in A\}$.)
   b) Ορίζουμε $\partial K := K \setminus K^\circ$. Εξηγήστε ότι, αν δείξουμε ότι $\lambda^*(\partial A) = 0$, τότε τελειώσαμε (δηλαδή το K θα είναι Lebesgue-μετρήσιμο.)

[1] Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $x, y \in K$ και $s \in [0,1]$, ισχύει και ότι $sx + (1-s)y \in K$. Δηλαδή, το K περιέχει ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα x, y.

c) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε από εδώ και στο εξής ότι $0 \in K^{\circ}$. Έστω $p \in \partial K$. Δείξτε ότι, για κατάλληλα μικρά $\varepsilon > 0$, το $(1-\varepsilon) \cdot p$ ανήκει στο K°.

   (Υπόδειξη: Αφού το $0 \in K^{\circ}$, υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(0,r) \subset K^{\circ}$. Δείξτε ότι η ένωση

$$\bigcup_{s \in (0,1)} \Big(s \cdot p + (1-s)\, B(0,r) \Big)$$

   είναι ανοιχτό σύνολο, που περιέχεται στο K°. Δείξτε ότι το $(1-\varepsilon) \cdot p$ ανήκει στην παραπάνω ένωση, όταν το $\varepsilon > 0$ είναι κατάλληλα μικρό.)

d) Δείξτε ότι $\partial K \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon} K^{\circ} \setminus K^{\circ}$, για κάθε $\varepsilon > 0$ κατάλληλα μικρό.

e) Αποφανθείτε ότι $\lambda^{*}(\partial K) = 0$.

7. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1)$ ως εξής: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Έστω N ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Δείξτε ότι

$$\lambda_{*}(N) = 0, \quad \lambda^{*}(N) > 0, \quad \text{και} \quad \lambda^{*}([0,1] \setminus N) = 1.$$

(Παρατηρήστε ότι αυτή η άσκηση δίνει μία ακόμη απόδειξη (πέρα από αυτή του μαθήματος 1) ότι το N δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.)