Θεωρία Μέτρου 2024-25 - Φυλλάδιο 3

Προθεσμία παράδοσης: 7 Ιανουαρίου 2024. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\int |f|\, d\lambda < +\infty$.

   a) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

   $$\text{για κάθε } E \subset \mathbb{R} \text{ με } \lambda(E) < \delta, \text{ ισχύει ότι } \int_E |f|\, d\lambda < \varepsilon.$$

   (Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για f μη αρνητική, απλή συνάρτηση.)

   b) Δείξτε ότι η $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

   $$F(x) := \int_a^x f\, d\lambda \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

   είναι συνεχής. (Παρατηρήστε ότι αυτό επεκτείνει μία γνωστή ιδιότητα Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε Lebesgue-ολοκληρώσιμες.)

2. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου, και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων $f_n : (X,\mathscr{A},\mu) \to [0,+\infty)$.

   a) Δείξτε ότι, αν $\int f_1\, d\mu < +\infty$, τότε $\int f_n\, d\mu \to \int (\lim_{n\to+\infty} f_n)\, d\mu$. (Δηλαδή, ειδικά υπό αυτές τις συνθήκες, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ισχύει και για φθίνουσες ακολουθίες.)

   b) Δείξτε ότι, αν $\int f_n\, d\mu = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το συμπέρασμα στο (a) μπορεί να αποτυγχάνει.

3. a) Υπολογίστε τα εξής:

   $$\text{(i)} \lim_{n\to+\infty} \int_{(0,1)} \frac{1}{2\sqrt{x}-x^n}\, d\lambda(x), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to+\infty} \int_{(0,+\infty)} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n d\lambda(x).$$

   b) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, με

   $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Δείξτε ότι η f είναι Lebesgue-μετρήσιμη και υπολογίστε το $\int_{[0,1]} f\, d\lambda$.

4. Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου, και έστω ότι υπάρχει μία $\mathscr{A}$-μετρήσιμη $f: X\to\mathbb{R}$, με $\int |f| d\mu < +\infty$, και με την επιπλέον ιδιότητα ότι είναι αυστηρά θετική (δηλαδή, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$). Δείξτε ότι ο $(X,\mathscr{A},\mu)$ είναι σ-πεπερασμένος.

5. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

a) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων $f_n : (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \lambda) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι $f_n \to f$ κ.σ. Τότε, $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$.

b) Έστω $f : ([0,1], \mathscr{L}([0,1]), \lambda) \to [0, +\infty)$ φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = \inf\left\{ \int_{[0,1]} s \, d\lambda : s \text{ απλή, με } f \leq s \right\}.$$

c) Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \lambda) \to [0, +\infty)$ φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}} s \, d\lambda : s \text{ απλή, με } f \leq s \right\}.$$

6. Έστω $f : (\mathbb{R}, \mathscr{L}(\mathbb{R}), \lambda) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει για λ-σχεδόν κάθε $x \in [0,1]$.