Θεωρία Μέτρου 2024-25 - Φυλλάδιο 4

Επαναληπτικές ασκήσεις

Προθεσμία παράδοσης: 19 Ιανουαρίου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathscr{F}$ σ-άλγεβρα στο X, και $B \subset X$ με την ιδιότητα ότι $B \notin \mathscr{F}$. Δείξτε ότι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει συγχρόνως όλα τα στοιχεία της $\mathscr{F}$ και το B (δηλαδή η $\sigma(\mathscr{F} \cup \{B\})$) είναι η οικογένεια
$$\mathscr{C} := \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B^c) : A_1, A_2 \in \mathscr{F}\}.$$
2. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό $A \subseteq [0,1]$, με $\lambda(A) = \frac{1}{3}$, το οποίο δεν περιέχει κανέναν ρητό.
3. Έστω $d \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την άσκηση δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^d$, και συμβολίζουμε με $B(x_i, r_i)$ την ανοιχτή μπάλα (ως προς την Ευκλείδεια μετρική) με κέντρο x_i και ακτίνα r_i.
   a) Σταθεροποιούμε $s \geq 0$ και $\delta > 0$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε
   $$H^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(x_i, r_i),\ \text{όπου } x_i \in \mathbb{R}^d \text{ και } r_i < \delta \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}\right\}.$$
   (Δηλαδή, καλύπτουμε το A με όλους τους δυνατούς τρόπους με αριθμήσιμες το πλήθος μπάλες ακτίνας $< \delta$, και παίρνουμε το inf των 'όγκων' τους, όπου εδώ ο όγκος υπολογίζεται λες και η μπάλα έχει διάσταση s και όχι d.)
   Δείξτε ότι το H^s_δ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$.
   b) Έστω $s \geq 0$ και $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι, καθώς $\delta \downarrow 0$, έχουμε ότι $\left(H^s_\delta(A)\right) \uparrow$.
   c) Το b) σημαίνει ότι, για κάθε $s \geq 0$ και $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίζεται καλά το
   $$H^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} H^s_\delta(A).$$
   Δείξτε ότι το H^s είναι και αυτό εξωτερικό μέτρο στο $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$.
   d) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι, αν για κάποιο $s_0 \geq 0$ έχουμε ότι $H^{s_0}(A) < +\infty$, τότε $H^s(A) = 0$ για κάθε $s > s_0$.

   (**Κάποια σχόλια για όποιον ενδιαφέρεται**: Για κάθε $s \geq 0$, το H^s είναι μέτρο στη $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, και λέγεται το *$s$-διάστατο μέτρο Hausdorff* στον $\mathbb{R}^d$. Εύκολα βλέπουμε ότι το H^d ταυτίζεται με το μέτρο Lebesgue λ_d. Και, από το d), για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ υπάρχει κάποιο κατώφλι s_0 κάτω από το οποίο το s-διάστατο μέτρο Hausdorff του A είναι $+\infty$, και πάνω από το οποίο είναι 0. Αυτό το κατώφλι λέγεται η *διάσταση Hausdorff* του A, και δε χρειάζεται να είναι ακέραιος αριθμός. Π.χ. το σύνολο Cantor έχει διάσταση Hausdorff $\frac{\log 2}{\log 3}$. Επίσης πολλά fractal σύνολα μπορεί να έχουν περίεργη διάσταση.)

4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$, αποκαλούμε *βελόνα με βάση το x* το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα

$$\{x+(a,0,0):\ a \in (0,1]\}$$

μήκους 1 (χωρίς το άκρο x).

Έστω $K \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in K$, ολόκληρη η βελόνα με βάση το x ζει εκτός του K (δηλαδή περιέχεται στο K^c). Δείξτε ότι $\lambda(K)=0$.

5. Λέμε ότι η μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to[-\infty,+\infty]$ έχει *φραγμένο φορέα* αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$g=0 \text{ στο } \mathbb{R}\setminus[-n,n].$$

a) Δείξτε ότι, για κάθε μετρήσιμη $f:\big(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),\lambda\big)\to[0,+\infty]$, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα, ώστε $s_n \to f$ κατά σημείο.

b) Έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι, για κάθε ολοκληρώσιμη $f:\big(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),\lambda\big)\to\mathbb{R}$, υπάρχει απλή συνάρτηση s με φραγμένο φορέα ώστε

$$\|f-s\|_1<\varepsilon.$$

(Δείξτε το πρώτα για μη αρνητική f, χρησιμοποιώντας το (α).)

6. a) Έστω $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A)<+\infty$. Έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι υπάρχει σύνολο U που είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων και για το οποίο ισχύει ότι

$$\lambda(A\triangle U)<\varepsilon.$$

(Αυτή είναι μία από τις **3 αρχές του Littlewood**: Κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου είναι 'πρακτικά' πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.)

b) Έστω $s:\big(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),\lambda\big)\to\mathbb{R}$ απλή συνάρτηση με φραγμένο φορέα (δείτε την προηγούμενη άσκηση για τον ορισμό). Έστω $\varepsilon>0$. Δείξτε ότι υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\|s-g\|_1<\varepsilon.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι η g είναι κλιμακωτή αν $g=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{I_i}$, όπου $n\in\mathbb{N}$, τα $c_i\in\mathbb{R}$ και τα I_i είναι φραγμένα διαστήματα.)

c) Χρησιμοποιήστε τα 5(b) και 6(b) για να δείξετε το εξής:
Για κάθε ολοκληρώσιμη $f:\big(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),\lambda\big)\to\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών συναρτήσεων ώστε

$$\|f-g_n\|_1\to 0.$$

7. Έστω $\delta>0$ και $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{\delta x}{x+1} \qquad \text{για κάθε } x>0.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $\alpha>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,\alpha]} f(nx)\,d\lambda(x)=\delta\alpha.$$