① (a) Ορίζουμε $\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{n\in I} A_n \ : \ I \subseteq \mathbb{N} \right\}$. ΘΔΟ $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$.

- $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$: $\forall\, I \subseteq \mathbb{N}$, $\forall n \in I$, έχουμε ότι $A_n \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$

$$\xrightarrow[\substack{\sigma(\mathcal{F}) \\ \sigma\text{-άλγεβρα,} \\ I \text{ αριθμήσιμο}}]{} \bigcup_{n\in I} A_n \in \sigma(\mathcal{F}).$$

- $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$: Αρκεί ΝΔΟ η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}$ σ-άλγεβρα:

(i) $\emptyset = \bigcup_{n\in\emptyset} A_n \in \mathcal{B}$.

(ii) Έστω $B \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists\, I \subseteq \mathbb{N}$ με $B = \bigcup_{n\in I} A_n \Longrightarrow$

$\longrightarrow \quad X \setminus B = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus I} A_n \in \mathcal{B}.$

(iii) Έστω $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$. Τότε, $\forall n$, $B_n = \bigcup_{k \in I_n} A_k$, για κάποιο $I_n \subseteq \mathbb{N}$.

Επομένως, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{k \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n} A_n \in \mathcal{B}.$

$\rightsquigarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = \bigcup_{n \in \{k\}} A_n \in \mathcal{B}.$

(b) (i) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ εξ ορισμού. Επίσης, η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα:

- $\emptyset \in \mathcal{C}$, αφού $\emptyset \in \mathcal{A}$ και $a, b \notin \emptyset$.
- Έστω $C \in \mathcal{C}$. Τότε, $C \in \mathcal{A}$, και:

- Αν $a,b \in C$, τότε $a,b \notin \underbrace{X \setminus C}_{\in \mathcal{A}}$, άρα $X \setminus C \in \mathcal{C}$.

- Αν $a,b \notin C$, τότε $a,b \in \underbrace{X \setminus C}_{\in \mathcal{A}}$, άρα $X \setminus C \in \mathcal{C}$.

• Έστω $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{C}$. Τότε, $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{A}$.

Επίσης:

- Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ τα $a,b \notin C_n$, τότε $a,b \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{C}$.

- Αν $\exists n \in \mathbb{N}$ με $a,b \in C_n$, τότε $a,b \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{C}$.

(ii) Ορίζουμε $\mathcal{C} := \{ A \in \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{} : a,b \in A$ ή $a,b \notin A \}$

λύνεται και με $\mathcal{A}$ αντί για $\mathcal{P}(X)$ εδώ, αλλά λίγο πιο δύσκολα.

$\mathcal{P}(X)$ σ-άλγεβρα στο $X \xRightarrow{b(i)}$ η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα στο X

Επίσης, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$. Άρα, $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}$. Δηλαδή:

$\forall A \in \underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}}$, έχουμε ότι $a,b \in A$ ή $a,b \notin A$.

② (a), (b) : Αρκεί να δειχθεί ότι τα διαφορετικά μεταξύ τους M_x αποτελούν τις κλάσεις ισοδυναμίας για μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον X. Και όντως:

Για κάθε $x, y \in X$, ορίζουμε $x \sim y \overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow} y \in M_x$

($\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ με $x \in A$, έχουμε και ότι $y \in A$).

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον X:

- $\forall x \in X$, $x \sim x$, αφού $x \in M_x$.
- Έστω $x \sim y$, δηλ. $y \in M_x$. Τότε, $y \sim x$, δηλ. $x \in M_y$.

Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\boxed{y \in A}$ (*). Τότε έχουμε και ότι $x \in A$:

Αν ίσχυε ότι $x \notin A$, δηλ. $x \in X \setminus A$, τότε θα είχαμε ότι $M_x \subseteq X \setminus A$, άρα λόγω της (*) το $y \notin M_x$, άτοπο.

- Έστω $x \sim y$ και $y \sim z$. Τότε, $x \sim z$:

  Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A$. ΘΔΟ $z \in A$:

  Αφού $x \sim y$, έχουμε και ότι $y \in A$. Αφού $y \sim z$, έχουμε και ότι $z \in A$. $\lrcorner$

Αφού εξ ορισμού, $\forall x \in X$, $y \sim x \Longleftrightarrow y \in M_x$, αυτόματα το M_x είναι η κλάση ισοδυναμίας του X. Έτσι προκύπτουν τα (a), (b).

(c) Τα διαφορετικά M_x αποτελούν διαμέριση του X, και είναι πεπερασμένα το πλήθος. Άρα, από το ①(a), γράφοντας

$$\mathcal{F} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_{\underbrace{\#\mathcal{F}}_{\text{πεπερασμένο}}} \},$$

παίρνουμε

$$\sigma(\mathcal{F}) = \Big\{ \bigcup_{n \in I} A_n : I \subseteq \{1, 2, \ldots \#\mathcal{F}\} \Big\}.$$

Άρα, $\#\sigma(\mathcal{F}) = 2^{\#\mathcal{F}}$ (τα A_n είναι ξένα ανά δυο).

Τώρα δείχνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$:

• $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$: Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε, $\forall x \in A$, έχουμε

και ότι $M_x \subseteq A$. Άρα, $A = \bigcup_{x \in A} \underbrace{M_x}_{\in \sigma(\mathcal{F})}$.

Τα διαφορετικά μεταξύ τους M_x σε αυτή την ένωση είναι πεπερασμένα το πλήθος, άρα το A είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, άρα $A \in \sigma(\mathcal{F})$.

• $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$: Μόλις δείξαμε ότι $\mathcal{A} \subseteq \underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{\text{πεπερασμένη}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ πεπερασμένη. Τότε, $\forall\, M_x \in \mathcal{F}$

$$M_x = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in A}} A \quad , \text{ το}$$

M_x είναι <u>πεπερασμένη</u> τομή στοιχείων της $\underbrace{\mathcal{A}}_{\sigma\text{-άλγ.}}$. Άρα, $M_x \in \mathcal{A}$.

Επομένως, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) \Longrightarrow \#\mathcal{A} = \#\sigma(\mathcal{F}) = 2^{\#\mathcal{F}}$.

(d) Έστω ότι η $\mathcal{A}$ είναι <u>αριθμήσιμη</u>.

Τότε, η $\mathcal{F} = \{M_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{A}$, καθώς, $\forall x \in X$,

$$M_x = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in A}} A \rightsquigarrow$$ <u>αριθμήσιμη</u> τομή στοιχείων της $\mathcal{A}$, άρα $M_x \in \mathcal{A}$.

Άρα, η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη επίσης, αλλά αυτή τη φορά άπειρη (καθώς, αν $\#\mathcal{F} < +\infty$, τότε $\#\mathcal{A} < +\infty$ από το (c)).

Επομένως, $\mathcal{F} = \{ M_{x_1}, M_{x_2}, \dots \}$, όπου τα M_{x_i} είναι ξένα ανά δύο, και αποτελούν διαμέριση του X. Άρα,

$$\sigma(\mathcal{F}) \overset{1a}{=} \left\{ \bigcup_{i \in I} M_{x_i} : I \subseteq \mathbb{N} \right\} \overset{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}}{\subseteq} \mathcal{A}.$$

$\forall\ I, I' \subseteq \mathbb{N}$ με $I \neq I'$, έχουμε ότι $\bigcup_{i \in I} M_{x_i} \neq \bigcup_{i \in I'} M_{x_i}$.

Άρα, η $\sigma(\mathcal{F})$ έχει τόσα στοιχεία όσα είναι και τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, δηλ. η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Αφού $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$, είναι και η $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη.

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την αρχική μας υπόθεση ότι η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμη.

Επομένως, η $\mathcal{A}$ <u>δεν</u> είναι αριθμήσιμη $\longrightarrow$ $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη.

3 (α) Έστω για άτοπο ότι $|x-y| \in \mathbb{Q}$ $\forall x,y \in A \Rightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ $\forall x,y \in A$.

Έστω $x_0 \in A$. Τότε, $y - x_0 \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in A$

$\longrightarrow$ $y \in x_0 + \mathbb{Q}$ $\forall y \in A$,

δηλ. $A \subseteq \underbrace{x_0 + \mathbb{Q}}_{\text{αριθμήσιμο}}$ $\longrightarrow$

A αριθμήσιμο, δηλ. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \bigcup_{n=1}^{K} \{a_n\}$

πληθάριθμος $K \in \mathbb{N}$ ή άπειρος αριθμήσιμος.

Άρα, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{K} \underbrace{\mu(\{a_n\})}_{=0} = 0.$

(b) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n}_{=B_k}$, όπου $(B_k)\downarrow$ στην $\mathcal{A}$,

και $\mu(B_1) \underset{B_1 \subseteq X}{\leq} \mu(X) = 1 < +\infty.$

Άρα, $\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \geq \mu(A_n) \geq \frac{1}{2}$. Άρα, $\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) \geq \frac{1}{2}.$

④ (α) $A \Delta B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{A}} \amalg \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{A}}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\mu(A \Delta B)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geqslant 0} \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0.$$

Και:

$$\left.\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \amalg (A \cap B) \Longrightarrow \mu(A) = \overset{\overset{0}{\parallel}}{\mu(A \setminus B)} + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B), \\ B &= (B \setminus A) \amalg (B \cap A) \Longrightarrow \mu(B) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{\mu(B \setminus A)} + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu(A) = \mu(B).$$

(b) Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου και $\mu(A \Delta B) = 0$, κάθε υποσύνολο του $A \Delta B$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Άρα, $A \setminus B \in \mathcal{A}$, $\underline{B \setminus A \in \mathcal{A}}$.

Και: $\underbrace{A}_{\in \mathcal{A}} = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{A}} \amalg (A \cap B) \Longrightarrow \underline{A \cap B} = A \setminus (A \setminus B) \ \underline{\in \mathcal{A}}$.

Άρα, $B = \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(B \cap A)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

(c) • $\forall\, A, B \in \mathcal{A}$, $d(A,B) = \mu(A \Delta B) \geq 0$. Και:

$\forall\, A \in \mathcal{A}$, $d(A,A) = \mu(A \Delta A) = \mu(\emptyset) = 0$.

- $\forall\ A, B \in \mathcal{A},\quad d(A,B) = \mu(\underbrace{A \Delta B}_{\overset{\shortparallel}{B \Delta A}}) = \mu(B \Delta A) = d(B,A).$

- $\forall\ A, B, C \in \mathcal{A},\quad d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$:

(*) $\boxed{A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C),}$ επειδή

$\forall\ x \in A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$:

- Αν $x \in A \setminus C$, τότε
  - αν $x \in B \Rightarrow x \in B,\ x \notin C \Rightarrow x \in B \setminus C$
  - αν $x \notin B \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$

$\Rightarrow x \in (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$

- Αν $x \in C \setminus A$, παρόμοια καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Λόγω της ⊛, $\underset{d(A,C)}{\underset{\shortparallel}{\mu(A\Delta C)}} \leq \underbrace{\mu(A\Delta B)}_{\substack{\shortparallel \\ d(A,B)}} + \underbrace{\mu(B\Delta C)}_{\substack{\shortparallel \\ d(B,C)}}$.

⑤ (a) $\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : 0 < \mu(A) < +\infty\}$ ($\neq \emptyset$, αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο).

$a := \sup\limits_{C \in \mathcal{C}} \mu(C)$. ΘΔΟ $a = +\infty$. Έστω ότι $a < +\infty$.

$\exists \, (A_n)_{n=1}^{+\infty}$, με $A_n \in \mathcal{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε $\mu(A_n) \longrightarrow a$.

Ισχύει, $\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}_{\in \mathcal{A}}\Big) = a$:

$$H \quad \Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} A_n}_{\in \mathcal{A}} \Big)_{N=1}^{+\infty}$$ είναι αύξουσα, με $\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$,

άρα $$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big).$$

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad 0 < \mu(A_N) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < +\infty$$

$$\longrightarrow \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{C} \longrightarrow \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq a.$$ Άρα,

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \underset{\substack{\big\downarrow N\to+\infty \\ a}}{\mu(A_N)} \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq \underset{\substack{\big\downarrow N\to+\infty \\ a}}{a} \longrightarrow \lim_{N\to+\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) = a.$$

Επομένως, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = a.$

Συμβολίζουμε $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Τότε, $\mu(X) = +\infty$, $\mu(A) < +\infty$

$$\Longrightarrow \mu(X \setminus A) = +\infty$$

$$\xRightarrow{\mu \text{ ημιπ.}} \exists \; B \subseteq X \setminus A \text{ με}$$

$$0 < \mu(B) < +\infty.$$

Τότε, $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B) \underset{\neq}{>} \mu(A) = a$,

και $< +\infty$.

Αυτό είναι άτοπο (καθώς $A \sqcup B \in \mathcal{C}$).

Άρα, $a = +\infty$.

(b) $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$

$$\text{με} \quad \nu(A) = \begin{cases} +\infty, & A \neq \emptyset \\ 0, & A = \emptyset \end{cases}.$$

Το ν είναι μέτρο;

- $\nu(\emptyset) = 0$
- Για $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο,

$\rightsquigarrow$ αν όλα είναι το $\emptyset$, τότε $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \nu(\emptyset) = 0$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n),$$

$\rightsquigarrow$ αν κάποιο $A_{n_0} \neq \emptyset$, τότε $\nu(A_{n_0}) = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n) = +\infty$,

και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset \Rightarrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = +\infty$.

(c) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος $\Longrightarrow \exists\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ με

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \text{και} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = +\infty$. $A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(A \cap A_n)}_{\in \mathcal{A}}$

$$\Longrightarrow \underset{+\infty}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\mu(A)}}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \Longrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ με } \mu(A \cap A_n) > 0.$$

Επίσης, $\mu(A\cap A_n) \leq \mu(A_n) < +\infty$

Άρα, το $A\cap A_n \subseteq A$ και $0 < \mu(A\cap A_n) < +\infty$.

6 (a) • $\emptyset = f^{-1}(\underbrace{\emptyset}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{A}$.

• Έστω $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ με $A = f^{-1}(B)$

$\Rightarrow X\setminus A = f^{-1}(\underbrace{Y\setminus B}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{A}$.

• Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \longrightarrow \exists\, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ με

$A_n = f^{-1}(B_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n}_{\in \mathcal{B}}\Big) \in \mathcal{A}$.

(b) (f 1-1 και επί $\Longrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$, το $f(A) \in \mathcal{B}$, καθώς $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο <u>μοναδικό</u> $B \subseteq X$, συγκεκριμένα για το $B := f(A)$.

Άρα, η μ_* είναι καλά ορισμένη).

- $\mu_*(\emptyset) = \mu(\underbrace{f(\emptyset)}_{=\emptyset}) = 0$.

- Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ξένα ανά 2.

$\xrightarrow{f\ 1\text{-}1}$ $f(A_1), f(A_2), \ldots$ ξένα ανά 2, και $\in \mathcal{B}$

$$\longrightarrow \quad \mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} f(A_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(f(A_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_*(A_n) .$$