① • $\mu^*(\emptyset)=0$, αφού το $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο.

• $\forall\, A\subseteq B\subseteq \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\mu^*(A)\leq \mu^*(B)$.

Πράγματι:

⇝ Αν A αριθμήσιμο, τότε $\mu^*(A)=0\leq \mu^*(B)\in\{0,1,+\infty\}$.

⇝ Αν A υπεραριθμήσιμο και όχι μεγάλο, τότε $\mu^*(A)=1$ και B υπεραριθμήσιμο $\Longrightarrow \mu^*(B)\in\{1,+\infty\}$ $\Longrightarrow \mu^*(A)\leq \mu^*(B)$.

⇝ Αν A μεγάλο, τότε B μεγάλο $\longrightarrow \mu^*(A)=+\infty=\mu^*(B)$.

• Έστω $A_1, A_2, A_3,\ldots\subseteq\mathbb{R}$. Τότε,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n).$$ Πράγματι:

⇝ Αν όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα, τότε είναι αριθμήσιμη και η $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$. Άρα,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=0=\sum_{n=1}^{+\infty}0=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n).$$

⇝ Έστω ότι κάποια A_n είναι υπεραριθμήσιμα. Τότε:

ⓘ Αν $\exists$ μεγάλο A_{n_0}, τότε και η $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ είναι μεγάλη, άρα $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=+\infty=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n)$.

(ii) Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ το A_n δεν είναι μεγάλο,

Θεωρούμε το $I := \{n \in \mathbb{N} : A_n$ υπεραριθμήσιμο$\}$

$(I \neq \emptyset)$.

(ii) α) Αν I πεπερασμένο, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n \in I} \mu^*(A_n) = \# I.$$

Επίσης, η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ δεν είναι μεγάλη:

ΧΒΓ, $I = \{1, 2, \dots, k\}$.

$\forall n \in I$, $\exists M_n > 0 : A_n \cap [-M_n, M_n]^c$ αριθμήσιμο

$\Longrightarrow$ για $M := \max_{n \in I} M_n$, ισχύει ότι

$$A_n \cap [-M, M]^c \text{ αριθμήσιμο } \forall n \in I$$

$\overset{I \text{ πεπερ.}}{\Longrightarrow} \left(\bigcup_{n \in I} A_n \right) \cap [-M, M]^c$ αριθμήσιμο

$\underset{\forall n \notin I}{\overset{A_n \text{ αριθμ.}}{\Longrightarrow}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap [-M, M]^c$ αριθμήσιμο.

Ωστόσο, η $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Άρα, $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 \leq \# I = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$.

(ii) b) Αν I άπειρο, τότε $\mu^*(A_n) = 1 \quad \forall n \in I$

$$\Longrightarrow \sum_{n\in I} \mu^*(A_n) = \sum_{n\in I} 1 = +\infty$$

$$\longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) = +\infty \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

(2) $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

Τότε, $\forall B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(B) = \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A)$.

Για $B = (a,b)$, παίρνουμε ότι

$$b-a = \lambda^*\big((a,b)\cap A\big) + \lambda^*\big((a,b)\setminus A\big).$$

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι, $\forall\ (a,b)$, ισχύει ότι

$$b-a = \lambda^*\big((a,b)\cap A\big) + \lambda^*\big((a,b)\setminus A\big). \quad (*)$$

ΘΔΟ το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο, δηλαδή ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A), \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}.$$

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$. Αρκεί ΝΔΟ

$$\lambda^*(B) \geqslant \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A)$$

(αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει από υποπροσθετικότητα).

$\forall$ κάλυψη $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)$, έχουμε ότι

$$B \cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big((a_n, b_n) \cap A \Big)$$

και $$B \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big((a_n, b_n) \setminus A \Big).$$

Και: $$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\lambda^* \big((a_n, b_n) \cap A \big) + \lambda^* \big((a_n, b_n) \setminus A \big) \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^* \big((a_n, b_n) \cap A \big) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^* \big((a_n, b_n) \setminus A \big)$$

$$\geq \lambda^* \Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big((a_n, b_n) \cap A \big)}_{\supseteq B \cap A} \Big) + \lambda^* \Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big((a_n, b_n) \setminus A \big)}_{\supseteq B \setminus A} \Big)$$

υποπροσθε-
τικότητα

$$\geq \lambda^* (B \cap A) + \lambda^* (B \setminus A).$$

μονοτονία

Δείξαμε ότι, $\forall$ κάλυψη $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n)$,

$$\lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n).$$

Παίρνοντας inf πάνω σε όλες αυτές τις καλύψεις, παίρνουμε ότι

$$\lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B\setminus A) \leq \lambda^*(B),$$

όπως θέλαμε.

③ • Έστω ότι $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Ξέρουμε ότι $\exists$ κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n)$,

με $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) \leq \lambda(A) + \varepsilon$.

ΘΔΟ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\lambda\left(A\cap(a_{n_0}, b_{n_0})\right) > \frac{99}{100}(b_{n_0} - a_{n_0})$.

Έστω για άτοπο ότι

$$(*) \qquad \lambda\left(A\cap(a_n,b_n)\right) \leq \frac{99}{100}(b_n - a_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε, $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) \leq \lambda(A) + \varepsilon$

$$= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(A\cap(a_n,b_n)\right)\right) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left(A \cap (a_n, b_n)\right) + \varepsilon$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{99}{100}(b_n - a_n) + \varepsilon$$

$$= \frac{99}{100} \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) + \varepsilon$$

$$\leq \frac{99}{100}\left(\lambda(A) + \varepsilon\right) + \varepsilon$$

$$< \frac{99}{100}\lambda(A) + 2\varepsilon.$$

Άρα, $\lambda(A) < \frac{99}{100}\lambda(A) + 2\varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{\lambda(A)}{100} < 2\varepsilon \Rightarrow \lambda(A) < 500\varepsilon.$$

Επιλέγοντας $\varepsilon < \frac{\lambda(A)}{500}$, οδηγούμαστε

στο ότι $\lambda(A) < \lambda(A) \rightsquigarrow$ άτοπο

- Έστω ότι $\lambda(A) = +\infty$.

Τότε, $\exists\, n \in \mathbb{N} : 0 < \lambda\left(A \cap (-n, n)\right) < +\infty$,

καθώς $\underbrace{\lambda\left(A \cap (-n,n)\right)}_{<+\infty\ \forall n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(A) = +\infty$

(από συνέχεια του μέτρου).

Άρα, από την 1η περίπτωση, $\exists\ (a,b)$:

$$\lambda\big(A \cap (-n,n) \cap (a,b)\big) \geq \frac{99}{100}(b-a)$$

$$\longrightarrow \lambda\big(A \cap (a,b)\big) \geq \frac{99}{100}(b-a).$$

4 (a) <u>Λάθος</u>. Το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ έχει $\lambda(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = +\infty$, αλλά δεν περιέχει διάστημα (αφού κάθε διάστημα περιέχει ρητό).

(b) <u>Σωστό</u>. Ξέρουμε ότι

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές} \subseteq A\}.$$

Κάθε τέτοιο K είναι κλειστό $\subseteq A$, δηλ.

$$\{K : K \text{ συμπαγές} \subseteq A\} \subseteq \{F : F \text{ κλειστό} \subseteq A\}$$

$$\{\lambda(K) : \text{———}\ \text{''}\ \text{———}\} \subseteq \{\lambda(F) : \text{———}\ \text{''}\ \text{———}\}$$

$$\Rightarrow \sup\{\text{———}\ \text{''}\ \text{———}\} \leq \sup\{\text{———}\ \text{''}\ \text{———}\}.$$

Άρα, $\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό} \subseteq A\}$.

Από την άλλη, $\forall$ F κλειστό $\subseteq A$ έχουμε:

$$\lambda(F) \leq \lambda(A)$$

$$\Longrightarrow \quad \sup\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό} \subseteq A\} \leq \lambda(A).$$

Επομένως, ισχύει η ισότητα.

(c) <u>Λάθος</u>. Π.χ δεν ισχύει για το $A = \mathbb{Q}^n$:

$\forall$ F κλειστό $\supseteq \mathbb{Q}^n$, έχουμε ότι

$$F \supseteq \overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n \Longrightarrow F = \mathbb{R}^n.$$

Άρα, ενώ $\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0$, έχουμε ότι

$$\inf\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό} \supseteq \mathbb{Q}^n\} =$$

$$= \inf\{\lambda(\mathbb{R}^n)\} = \lambda(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

(d) <u>Σωστό</u>. $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$.

Το A° είναι Lebesgue-μετρήσιμο, ως ανοιχτό.

Το $A \setminus A^\circ \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ$, όπου $\lambda(\bar{A} \setminus A^\circ) = 0$.

Αφού το λ είναι πλήρες μέτρο, ισχύει ότι

και $A \setminus A^{o} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Άρα, αφού η $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα,

έχουμε ότι και $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ (ως ένωση

Lebesgue - μετρησίμων).

(5) • Έστω ότι τα A, B είναι <u>φραγμένα</u>.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε

$a \in A$: $a \in (\sup A - \varepsilon, \sup A]$

και $b \in B$: $b \in [\inf B, \inf B + \varepsilon)$

Ορίζουμε $A' := A \cap (-\infty, a) \subseteq A$

$B' := B \cap (b, +\infty) \subseteq B$.

Τότε, $A' + b \subseteq A + B$,

$B' + a \subseteq A + B$,

και $(A' + b) \cap (B' + a) = \emptyset$:

$\forall$ $a' \in A'$, έχουμε ότι $\underbrace{a'}_{\neq a} + b < a + b$, ενώ $\forall\, b' \in B'$ έχουμε $\underbrace{b'}_{\geq b} + a > b + a$.

Άρα, $$\lambda(A+B) \geq \lambda\big((A'+b) \amalg (B'+a)\big)$$
$$= \lambda(A'+b) + \lambda(B'+a)$$
$$= \lambda(A') + \lambda(B')$$
$$\geq \lambda(A) - \varepsilon + \lambda(B) - \varepsilon$$
$$= \lambda(A) + \lambda(B) - 2\varepsilon.$$

Δηλαδή, $\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B) - 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$, παίρνουμε
$$\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B).$$

- Έστω ότι τα A, B είναι τυχαία Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα. Ξέρουμε (από συνέχεια του μέτρου) ότι

$$\lambda\big(\underbrace{A \cap (-n,n)}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(A),$$

φραγμένα

$$\lambda\big(\overbrace{B \cap (-n,n)}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(B).$$

Άρα, $\lambda(A+B) \geq \lambda\left(\left[A\cap(-n,n)\right] + \left[B\cap(-n,n)\right]\right)$

$$\overset{1n}{\underset{\text{περίπτωση}}{\geq}} \lambda\left(A\cap(-n,n)\right) + \lambda\left(B\cap(-n,n)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(A) + \lambda(B).$$

Επομένως, $\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$.

(6) (a) Έστω $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανοιχτών, φραγμένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}^2$. Εύκολα βλέπουμε ότι:

→ Αν $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, τότε $sA \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} sI_n$.

→ Αν $sA \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, τότε $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{1}{s} I_n\right)}_{\text{ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα στο } \mathbb{R}^2.}$

Επομένως, $\{ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$: I_n ανοιχτά, φρ. διαστήματα με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq sA \}$

$= \{ (sI_n)_{n\in\mathbb{N}}$: I_n ανοιχτά, φρ. διαστήματα με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq A \}$.

Άρα, $\lambda(sA) = \inf \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} v(I_n)$: I_n ανοιχτά, φρ. διαστήματα με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq sA \}$

$= \inf \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{v(sI_n)}^{\substack{s^2 v(I_n), \text{ εξ ορισμού του } v \\ \|}}$: I_n ανοιχτά, φρ. διαστήματα με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq A \}$

$= s^2 \cdot \inf \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} v(I_n)$: I_n ανοιχτά, φρ. διαστήματα με $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq A \}$

$= s^2 \lambda(A)$.

(b) Αν $\lambda^*(\partial K) = 0$, τότε $K \setminus K^o \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(τα σύνολα με λ^* ίσο με 0 ανήκουν στην

$$\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Άρα, θα έχουμε ότι $K = \underbrace{(K \setminus K^o)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)} \cup \underbrace{K^o}_{\substack{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ \text{ως ανοιχτό}}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$

(c) $0 \in \underbrace{K^o}_{\text{ανοιχτό}} \Longrightarrow \exists\ r > 0 : B(0, r) \subseteq K^o.$

$\forall\ s \in (0,1),\quad sp + (1-s)\,B(0,r) \subseteq K$
<u>και</u> ανοιχτό $\Big\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigcup_{s \in (0,1)} \big(sp + (1-s)\,B(0,r) \big) \subseteq K$$

<u>και</u> ανοιχτό, ως ένωση ανοιχτών $\Big\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigcup_{s \in (0,1)} \big(sp + (1-s)\,B(0,r) \big) \subseteq K^o.$$

Άρα, $\forall\ \varepsilon \in (0,1)$, θέτοντας $s = 1 - \varepsilon$,
παίρνουμε ότι $\underbrace{(1-\varepsilon)\cdot p + \varepsilon \cdot 0}_{= (1-\varepsilon)p} \in K^o.$

(d) Δείξαμε ότι $(1-\varepsilon)\,\partial K \subseteq K^o$

$$\Longrightarrow \quad \partial K \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon}\cdot K^o.$$

Αφού $\partial K \cap K^o = \emptyset$, προκύπτει ότι

$$\partial K \subseteq \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\cdot K^o\right) \setminus K^o$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^*(\partial K) \leq \lambda^*\Big(\underbrace{\Big(\frac{1}{1-\varepsilon} K^o\Big)\setminus K^o}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}\Big)$$

$$= \lambda\left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon} K^o\right)\setminus K^o\right).$$

Ισχύει ότι $K^o \subseteq \frac{1}{1-\varepsilon} K^o$: έχουμε υποθέσει

ότι $0 \in K^o$. $\forall\, x \in K^o$,

$$x = (1-\varepsilon)\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)}x\right]}_{\in \frac{1}{1-\varepsilon}K^o} + \varepsilon\cdot \underbrace{0}_{\in \frac{1}{1-\varepsilon}K^o} \in \frac{1}{1-\varepsilon}K^o,$$

αφού $\frac{1}{1-\varepsilon} K^o$ κυρτό, μιας και K^o κυρτό (απλό). Άρα, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lambda^*(\partial K) \leq$$

$$\leq \lambda\left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon} K^\circ\right) \setminus K^\circ\right) = \lambda\left(\frac{1}{1-\varepsilon} K^\circ\right) - \lambda(K^\circ)$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \lambda(K^\circ) - \lambda(K^\circ)$$

$$= \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} - 1\right) \underbrace{\lambda(K^\circ)}_{<+\infty} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Άρα, $\lambda^*(\partial K) = 0$. Άρα, το K είναι Lebesgue - μετρήσιμο.

(7) • $\lambda_*(N) = 0$: Έστω ότι $\lambda_*(N) > 0$.

Αφού $\lambda_*(N) = \sup\{\lambda(B) : B \text{ Borel} \subseteq N\}$,

$\exists$ B Borel $\subseteq N$ με $\lambda(B) > 0$.

Από Λήμμα του Steinhaus, $\exists\ \delta > 0$:

$B(0, \delta) \subseteq B - B \subseteq N - N$, άτοπο,

αφού ο μόνος ρητός στο $N - N$ είναι το 0

Γιατί 2 αντιπρόσωποι διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας διαφέρουν κατά άρρητο, αφού δεν είναι ισοδύναμοι).

Άρα, $\lambda_*(N)=0$.

• $\lambda^*(N)>0$: Έστω ότι $\lambda^*(N)=0$.

$$[0,1) \subseteq \coprod_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (q+N)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^*([0,1))}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda^*(q+N) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda^*(N)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(N)>0.$$

• $\lambda^*([0,1]\setminus N)=1$: Έστω ότι $\lambda^*([0,1]\setminus N)<1$.

Τότε, αφού $\lambda^*([0,1]\setminus N) = \inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel} \supseteq [0,1]\setminus N\}$,

$\exists$ Borel $\underbrace{B\supseteq[0,1]\setminus N}_{\Downarrow\ \ [0,1]\setminus B\,\subseteq N}$: $\underbrace{\lambda(B)<1}_{\Updownarrow\ \ \lambda([0,1]\setminus B)>0}$.

$$\underbrace{[0,1]\setminus B}_{\text{Borel}} \subseteq N \qquad \lambda([0,1]\setminus B)>0.$$

Άρα, $\lambda_*(N) \geq \lambda([0,1]\setminus B)>0$, άτοπο.

- Άρα, $\lambda^*([0,1] \setminus N) > 0$.