

3ο Φυλλαδίο - Λύσεις:

①(α). Έστω s αληθή συνάρτηση, με $\int |s| d\lambda < +\infty$.

Το ζητούμενο ισχύει για την s :

Έστω $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ η κανονική μορφή της s .

Τότε, $|s| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \chi_{A_j}$ (αφού τα A_j είναι ζεύγη ανά δύο).

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta := \frac{\varepsilon}{2 \cdot \sum_{j=1}^n |\alpha_j|}$,

έχουμε ότι, αν $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \int_E |s| d\lambda &= \sum_{j=1}^n \int_E |\alpha_j| \chi_{A_j} d\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{E \cap A_j} |\alpha_j| d\lambda = \\ &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \underbrace{\lambda(E \cap A_j)}_{< \delta} < \delta \cdot \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

• Έστω f μετρήσιμη, με $\int |f| d\lambda < +\infty$, και $\boxed{f \geq 0}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(s_n)_n \nearrow$ αληθών συναρτήσεων, με $0 \leq s_n \nearrow f$. Από ΘΜΣ,

$$\int s_n d\lambda \rightarrow \int f d\lambda,$$

και άρα, αφού $\int f d\lambda = \int |f| d\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \left| \int f d\lambda - \int s_{n_0} d\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{f \geq s_{n_0}} \forall E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \left| \int_E f d\lambda - \int_E s_{n_0} d\lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

Για την s_{n_0} ξέρουμε ήδη ότι ισχύει το ζητούμενο, άρα

$$\forall \delta > 0: \quad \forall E \subseteq \mathbb{R} \text{ με } \lambda(E) < \delta, \text{ έχουμε: } (0 \leq) \underbrace{\int_E s_{n_0} d\lambda}_{\int_E |s_{n_0}| d\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\star)$$

$$\text{Επομένως, } \int_E |f| d\lambda = \int_E f d\lambda = \left| \int_E f d\lambda \right| \leq \\ \leq \left| \int_E f d\lambda - \int_E s_{n_0} d\lambda \right| + \left| \int_E s_{n_0} d\lambda \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

• Έστω ωχραία μετρήσιμη f με $\int |f| d\lambda < +\infty$.

Τότε, $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, και $\int f^+ d\lambda < +\infty$, $\int f^- d\lambda < +\infty$.

Από το προηγούμενο βήμα, οι f^+ , f^- ικανοποιούν το ζητούμενο,

άρα: $\forall \varepsilon > 0$,

$$\leadsto \exists \delta_1 > 0: \quad \forall E \subseteq \mathbb{R} \text{ με } \lambda(E) < \delta_1, \quad \int_E f^+ d\lambda < \varepsilon/2,$$

$$\leadsto \exists \delta_2 > 0: \quad \forall E \subseteq \mathbb{R} \text{ με } \lambda(E) < \delta_2, \quad \int_E f^- d\lambda < \varepsilon/2,$$

άρα, για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, αν $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ με $\lambda(E) < \delta$,

$$\text{τότε } \int_E |f| d\lambda = \int_E f^+ d\lambda + \int_E f^- d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) • Για $x_0 > a$: Η f είναι συνεχής στο x_0 . Πράγματι:

$$\leadsto \forall x \geq x_0, \quad |f(x) - f(x_0)| = \left| \int_a^x f d\lambda - \int_a^{x_0} f d\lambda \right| = \\ = \left| \int_{x_0}^x f d\lambda \right| \leq \int_{x_0}^x |f| d\lambda = \int_{[x_0, x]} |f| d\lambda.$$

Από το (α), $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: αν $\lambda([x_0, x]) < \delta$,

$$\text{τότε } \int_{[x_0, x]} |f| d\lambda < \varepsilon, \text{ δηλ. } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Άρα, η f είναι δεξιά συνεχής στο x_0 .

$$\rightsquigarrow \text{για } x < x_0 : |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x)|$$

$$= \left| \int_a^{x_0} f d\lambda - \int_a^x f d\lambda \right| = \left| \int_x^{x_0} f d\lambda \right| \leq \int_{[x, x_0]} |f| d\lambda.$$

Και παλι and το (α), $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: αν $\lambda([x, x_0]) < \delta$, τότε $\int_{[x, x_0]} |f| d\lambda < \varepsilon$, δηλαδή $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Άρα, η f είναι και αριστερά συνεχής στο x_0 .

Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0 .

• Για $x_0 \leq a$: Παρόμοια.

⚠ Τονίζουμε εδώ ότι, τυπικά, το σύμβολο $\int_a^b f d\lambda$,

για $\boxed{a > b}$, σημαίνει: $-\int_b^a f d\lambda$. Δεν πειράζει

αν το ερμηνεύσετε διαφορετικά, καθώς δεν το είχαμε συνειδητοποιήσει.

② (α) $\forall x \in X, (f_n(x)) \downarrow$ στο $[0, +\infty)$, άρα

$\exists$ το $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) (= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x))$. Άρα:

• $f_n \rightarrow f$ π.σ.

• $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| = f_n \leq f_1$, όπου $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

f_1 μετρήσιμη και $\int |f_1| d\mu = \int f_1 d\mu < +\infty$ and υπόθεση.

And O.K.S., $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

(b) Για $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ με $f_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

έχουμε ότι : $(f_n)_n \downarrow$, $f_n \downarrow 0$ π.σ.,

αλλά : $\forall n$, $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} d\lambda = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\lambda(\mathbb{R})}_{+\infty} = +\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$,

ενώ $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0$.

③ (a) (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0,1)} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x} - x^n}} d\lambda = ?$ $f_n : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$
μερήσιμη, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 $\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x} - x^n}}_{f_n(x)}, \forall x \in (0,1)$

• $\forall x \in (0,1)$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x} - 0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \stackrel{=: f(x)}{=} \text{(αφαι } x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$

Άρα, $f_n \rightarrow f$ (σε $(0,1)$) π.σ.

• $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (0,1)$, $|f_n(x)| = \frac{1}{|2\sqrt{x} - x^n|} \stackrel{x^n < x^{1/2}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x} - x^n} \stackrel{\forall x \in (0,1)}{=}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x} - x^n}$$

$\forall x \in (0,1)$,
 $x^n < x^{1/2} = \sqrt{x}$
 $\Rightarrow 2\sqrt{x} - x^n > 2\sqrt{x} - \sqrt{x}$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} =: g(x),$$

όπου $g \in \mathcal{L}^1((0,1), \lambda) : g$ μερήσιμη (συνεχής),

και : $\int_{(0,1)} |g(x)| d\lambda(x) \stackrel{(*)}{=} \int_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) \stackrel{\text{O.K.S.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[\frac{1}{n}, 1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) =$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$
 Riemann-
 ολοκλήρωση
 στο $[\frac{1}{n}, 1]$
 (συνεχής σε κλειστό
 διάστημα)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x}}{2} \right]_{1/n}^1 \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1}}{2} - \frac{\sqrt{1/n}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} < +\infty.
 \end{aligned}$$

Άρα, από ΘΚΣ, $\int_{(0,1)} f_n d\lambda \longrightarrow \int_{(0,1)} f d\lambda =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(0,1)} f d\lambda = \int_{(0,1)} \frac{1}{2\sqrt{x}} d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_{(0,1)} \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}} d\lambda(x)
 \end{aligned}$$

$\nearrow$ n and $g(x)$ $\nearrow$ n $\nearrow$ $g(x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0,+\infty)} \boxed{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^n} d\lambda(x)$

$\Downarrow$
 $f_n(x), \forall x \in (0, +\infty).$

$\forall n \in \mathbb{N}$, n $f_n : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Και:

$\bullet \forall x \in (0, +\infty), \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$, άρα $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
 δηλαδή $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ κ.σ.

$\bullet \forall n \geq 2 : \forall x \in (0, +\infty), |f_n(x)| =$

$$= \left(\frac{|\sin x|}{|x|} \right)^n \leq \begin{cases} \frac{1}{|x|^n} \leq \frac{1}{|x|^2}, & \forall x \in (0, +\infty), \\ 1^n = 1, & \forall x \in (0, +\infty) \text{ (αφού } |\sin x| \leq |x| \forall x). \end{cases}$$

$\leadsto$ Η $\frac{1}{|x|^2}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, +\infty)$ $\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} d\lambda(x) = +\infty \right)$,

αλλά είναι στο $[1, +\infty)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^2} d\lambda(x) = \int_{[1, +\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda(x) \stackrel{\text{ΘΜΣ}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, n]} \frac{1}{x^2} d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right) = 1 < +\infty.$$

$\frac{1}{x^2}$ Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[1, n]$

(Αυτή οδηγεί σε επιλογή μας να αγνοήσουμε την f_1 , και να ασχοληθούμε με την $(f_n)_{n \geq 2}$ μόνο;

Η f_1 δεν είναι ολοκληρώσιμη κοντά στο $+\infty$).

$\leadsto$ Η 1 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε όλο το $(0, +\infty)$, αλλά είναι στο $(0, 1)$:

$$\int_{(0, 1)} |1| d\lambda = 1 < +\infty.$$

Άρα, η $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [1, +\infty) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$

είναι ολοκληρώσιμη: Είναι μετρήσιμη και

$$\int_{(0, +\infty)} |f| d\lambda = \int_{[1, +\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda(x) + \int_{(0, 1)} 1 d\lambda < +\infty.$$

και, λόγω της $\circledast$, έχουμε: $|f_n| \leq f$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού λοιπόν $f \in L^1((0, +\infty), \lambda)$, and $0 \leq f_n$,

$$\int_{(0, +\infty)} f_n d\lambda \longrightarrow \int_{(0, +\infty)} 0 d\lambda = 0.$$

(b) • Η $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in [0, 1]$, είναι συνεχής, άρα μετρήσιμη.

Η $\chi_{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι επίσης μετρήσιμη, αφού το $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ είναι Borel.

Άρα, η $f = g \chi_{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}}$ είναι μετρήσιμη (μάλιστα Borel-μετρήσιμη, πόσο μάλλον Lebesgue-μετρήσιμη) ως γινόμενο μετρήσιμων.

$$\bullet \int_{[0, 1]} f d\lambda = \int_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]} \sqrt{x} d\lambda(x) = \int_{[0, 1]} \sqrt{x} d\lambda(x), \text{ αφού}$$

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0 \quad (\text{και άρα } \int_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \sqrt{x} d\lambda(x) = 0).$$

Η $\sqrt{x}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$,

$$\text{άρα } \int_{[0, 1]} \sqrt{x} d\lambda(x) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Άρα, } \int_{[0, 1]} f d\lambda = \frac{2}{3}.$$

④ Αφού η f είναι θετική σε όλον τον X , έχουμε ότι

$$X = \{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, το $\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$ (αφού f μετρήσιμη).

και $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) < +\infty$:

$$\frac{1}{n} \cdot \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \int_{\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}} \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}} f d\mu \leq \int_X f d\mu < +\infty.$$

and
υποθέσθ.

⑤ (a) **Λάθος.** Αντιπαράδειγμα: $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n = -\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $(f_n)^\uparrow$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ άρα } \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

αλλά $f_n \nearrow 0$ κ.σ., με $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0$.

(b) **Σωστό.** f φραγμένη $\Rightarrow \exists M \in (0, +\infty): |f| \leq M$.

Άρα, η $M - f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ≥ 0 και μετρήσιμη

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{[0,1]} (M-f) d\lambda &= \sup \left\{ \int_{[0,1]} s d\lambda : s \text{ απλή, } 0 \leq s \leq M-f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_{[0,1]} s d\lambda : \overbrace{s \text{ απλή}}^{M-s \text{ απλή}}, \underbrace{s \leq M-f}_{f \leq M-s} \right\} \\ \int_{[0,1]} M d\lambda - \int_{[0,1]} f d\lambda &= \sup \left\{ - \int_{[0,1]} (M-s) d\lambda : M-s \text{ απλή, } f \leq M-s \right\} \end{aligned}$$

$$= - \inf \left\{ \int_{[0,1]} (M-s) d\lambda : M-s \text{ απλή, } f \leq M-s \right\}$$

$\sup(-A)$
"
 $-\inf A$

$$= -\inf \left\{ -\int_{[0,1]} M d\lambda + \int_{[0,1]} (M-s) d\lambda : \underbrace{M-s}_{=u} \text{ αληθής}, f \leq M-s \right\}$$

$$= -\inf \left\{ -\int_{[0,1]} M d\lambda + \int_{[0,1]} u d\lambda : u \text{ αληθής}, f \leq u \right\}$$

$$= - \left(-\int_{[0,1]} M d\lambda + \inf \left\{ \int_{[0,1]} u d\lambda : u \text{ αληθής}, f \leq u \right\} \right)$$

$$= \int_{[0,1]} M d\lambda - \inf \left\{ \int_{[0,1]} u d\lambda : u \text{ αληθής}, f \leq u \right\}.$$

Και ταίριαζουμε έστω ότι:

$$\cancel{\int_{[0,1]} M d\lambda} - \int_{[0,1]} f d\lambda = \cancel{\int_{[0,1]} M d\lambda} - \inf \left\{ \int_{[0,1]} u d\lambda : u \text{ αληθής}, f \leq u \right\}.$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} f d\lambda = \inf \left\{ \int_{[0,1]} u d\lambda : u \text{ αληθής}, f \leq u \right\}.$$

(c) **Λάθος.** Θεωρούμε για παράδειγμα την

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}.$$

Έχουμε ότι $\int_{(1,+\infty)} f d\lambda < +\infty$ (βλ. ③(α)(i)),

αλλά: $\forall$ αληθής s με $f \leq s$, έχουμε $\int s d\lambda = +\infty$

(και άρα $\int f d\lambda \neq +\infty = \inf \left\{ \int s d\lambda : s \text{ αληθής}, f \leq s \right\}$).

Πράγματι, έστω s αληθής με $f \leq s$. Αφού $f \geq 0$, έχουμε

και ότι $s \geq 0$, άρα η s παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές.

Επομένως, αν $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι οι θετικές τιμές της s ,

$$\text{τότε } s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ όπου } A_i := \{s = \alpha_i\}.$$

Αφού $f \leq s$, έχουμε ότι $\{s > 0\} \supseteq \{f > 0\} = [1, +\infty)$,
" $A_1 \cup \dots \cup A_n$

άρα $\lambda(A_1 \cup \dots \cup A_n) = +\infty \implies \exists j \in \{1, \dots, n\}$ με $\lambda(A_j) = +\infty$.

$$\text{Επομένως, } \int_{\mathbb{R}} s d\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i) \geq \underbrace{\alpha_j}_{>0} \underbrace{\lambda(A_j)}_{=+\infty} = +\infty.$$

⑥ Αρκεί ΝΔΟ η $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συχναίνει ανοήτως για λ -σχεδόν
κάθε $x \in [0, 1]$, δηλαδή ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f(x+n)| < +\infty \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν κάθε } x \in [0, 1].$$

Αυτό θα ισχύει εφόσον αν $\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x+n)| d\lambda(x) < +\infty$, *

άρα αρκεί να δείχνει η Ψ . Και πράγματι η Ψ ισχύει:

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x+n)| d\lambda(x) \stackrel{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,1]} |f(x+n)| d\lambda(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[n, n+1]} |f(x)| d\lambda(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[n, n+1)} |f(x)| d\lambda(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int |f| \chi_{[n, n+1)} d\lambda$$

$$\stackrel{\text{Levi}}{=} \int |f| \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{[n, n+1)}}_{\substack{'' \\ \chi_{[1, +\infty)}}} d\lambda$$

$$= \int_{[1, +\infty)} |f| d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < +\infty.$$