ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι

Βασικά Στοιχεία Λογισμού Πινάκων και Θεμελιώδεις Αλγόριθμοι

Μέρος Ι : Άλγεβρα Πινάκων

Μαριλένα Μητρούλη

Οκτώβριος 2023

1 Βαθμωτά διανύσματα και Πίνακες

Είναι οι θεμελιώδεις δομές της Γραμμικής Άλγεβρας.

- Βαθμωτά (scalars): Μεμονωμένες αριθμητικές τιμές. Για παράδειγμα σε μια εφαρμογή μηχανικής μάθησης η τιμή ενός χαρακτηριστικού όπως η ηλικία είναι βαθμωτό. Πχ $x \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

- Διανύσματα (vectors): Παράθεση πολλών βαθμωτών τιμών. Πχ $x = [x_1, x_2, x_3, x_4] \rightarrow$ διάνυσμα γραμμή, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Εν γένει, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow$ διάνυσμα στήλη $\in \mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$, είναι διάνυσμα διάστασης n.

Σε μία εφαρμογή ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^3$ διάστασης 3 μπορεί να περιέχει την ηλικία=25, αμοιβή ανά ώρα=30 και χρόνια προϋπηρεσίας=5 ενός ιδιώτη. Δηλαδή $x = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix}$
Ένα σύνολο τέτοιων διανυσμάτων που θα αντιστοιχούν σε πολλούς ιδιώτες αποτελούν έναν πίνακα δεδομένων (data matrix)

1.1 ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός Αν θεωρήσουμε $m \times n$ (βαθμωτά) στοιχεία a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$ από ένα σώμα $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) και το διατάξουμε σε m γραμμές και n στήλες:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$, έχουμε έναν πίνακα A διάστασης $m \times n$.

Συμβολισμός: $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου m=αριθμός γραμμών και n=αριθμός στηλών.

Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ συμβολίζεται με $\mathbb{F}^{m \times n}$.
Π.χ.: $\mathbb{R}^{m \times n}$ = το σύνολο όλων των πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

Ο πίνακας που σχηματίζεται αν οι στήλες του A γίνουν γραμμές και οι γραμμές στήλες λέγεται ανάστροφος και συμβολίζεται με A^T, δηλαδή εάν $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε $A^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ πίνακες ίδιας διάστασης. Οι πίνακες είναι ίσοι δηλαδή αν $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

1.2 Ειδικές Μορφές Πινάκων

Εάν m=n, τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$, λέγεται **τετραγωνικός**.

Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ είναι η **κύρια** διαγώνιος (a_{ij} τέτοια ώστε $i = j$), ενώ τα $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ είναι η **δευτερεύουσα** διαγώνιος (a_{ij} τέτοια ώστε $i + j = n + 1$).

- Τετραγωνικοί πίνακες της μορφής

  $$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  ονομάζονται **τριγωνικοί**. 0 A_1 κάτω τριγωνικός, ο A_2 άνω τριγωνικός.

- Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$, ονομάζεται **διαγώνιος** ($\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$).

- Ο πίνακας $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, ονομάζεται **μοναδιαίος**.

- Ο πίνακας $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, ονομάζεται **μηδενικός**.

Πίνακες με μία στήλη ή με μία γραμμή της μορφής:

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$, **πίνακας στήλη**

$c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \vdots & c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{1 \times n}$, **πίνακας γραμμή**

ταυτίζονται με τα αντίστοιχα διανύσματα στήλης ή γραμμής.

Ένας πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, μπορεί να παρασταθεί κατά στήλες ή γραμμές ως εξής:

- $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$

  Συμβολισμός **κατά στήλες**.

- $A = \begin{bmatrix} {r_1}^T \\ {r_2}^T \\ \vdots \\ {r_m}^T \end{bmatrix}, {r_i}^T = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m$

  Συμβολισμός **κατά γραμμές**.

2 Πράξεις Διανυσμάτων

Έστω $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ διάνυσμα στήλη και $a^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times n}$ το ανάστροφό του, διάνυσμα γραμμή.
Ορίζονται οι εξής δύο σημαντικές πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων στήλη $a, b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.

2.1 Εσωτερικό Γινόμενο (Inner product)

$$
\begin{aligned}
(a, b) = a^T \cdot b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} &= \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= \\
\sum_{n=1}^{n} a_i b_i &\in \mathbb{F}
\end{aligned}
$$

- Το εσωτερικό γινόμενο είναι μεταθετικό. $(a, b) = (b, a)$
- Το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό.

Παράδειγμα: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$
$(a, b) = a^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 20 \in \mathbb{R}$

2.1.1 Καταμέτρηση Πράξεων

Παρατήρηση: Εάν ορίσουμε σα μονάδα μέτρησης των πράξεων την εκτέλεση μίας πρόσθεσης και ενός γινομένου δηλαδή $1 flop = a + k \cdot b$. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο για τον υπολογισμό του χρειάζεται n flops. Θα συμβολίζουμε ότι οι πράξεις που απαιτούνται είναι της τάξης $O(n)$.

2.2 Εξωτερικό Γινόμενο (Outer product)

Για $a, b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ το εξωτερικό γινόμενο, συμβολίζεται με $a \times b$ και ισούται με:

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

και είναι πίνακας $n \times n$.

Μπορεί εν γένει $a \in \mathbb{F}^{n\times 1}$,$b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ τότε $ab^T \in \mathbb{F}^{n\times m}$.
Π.χ.: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
και έχουμε $a \times b = ab^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

3 Πράξεις Πινάκων και Ιδιότητες

3.1 Πράξεις

- **Πρόσθεση**
  $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ (ίδια διάσταση)
  $C = [c_{ij}] = A + B \in \mathbb{F}^{m\times n}$
  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, όπου $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

- **Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Βαθμωτό**
  $c \cdot A, c \in \mathbb{F}, A \in \mathbb{F}^{m\times n}$
  $B = [b_{ij}] = c \cdot A, b_{ij} = ca_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

- **Γινόμενο Πίνακα με Διάνυσμα**
  Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^n$.
  Το γινόμενο πίνακα με διάνυσμα $A\cdot b$ αποτελεί υποπερίπτωση του γενικού γινομένου πινάκων $A \cdot B$ εάν ο πίνακας B είναι πίνακας στήλη. Συγκεκριμένα:
  $A \cdot b = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \cdot b = \begin{bmatrix} a_1^T b \\ a_2^T b \\ \vdots \\ a_n^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \dots & a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & \dots & a_{2n}b_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}b_1 & a_{n2}b_2 & \dots & a_{nn}b_n \end{bmatrix}$, όπου κάθε $a_i^T b$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής του A με το διάνυσμα b και ισούται με:
  $(a_i, b) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j, i = 1, 2, ..., n$

  Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η απαιτούμενη πολυπλοκότητα για τον υπολογισμό του AB (matrix-vector product, *mvp*) απαιτεί n εσωτερικά γινόμενα, επομένως είναι της τάξης $O(n^2)$.

$y = A \cdot b \rightarrow$ matrix form (επίπεδο πινάκων) $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j, i = 1, 2, ..., n \rightarrow$ coordinate form (επίπεδο συντεταγμένων)

- **Γινόμενο Πινάκων**
  Έστω $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times l}$, κατά γραμμές και $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, κατά στήλες:
  οι στήλες του πρώτου ισούται με τις γραμμές του δεύτερου. Το γινόμενο AB ορίζεται ως εξής:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \overset{\text{εξωτ. γινόμ}}{=} \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & \dots & a_1^T b_n \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & \dots & a_2^T b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^T b_1 & a_m^T b_2 & \dots & a_m^T b_n \end{bmatrix},$$

όπου κάθε $a_i^T bj = (a_i, b_j)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-γραμμής με τη j-στήλη και ισούται με $\sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$.

Για να ορίζεται πρέπει οι στήλες του A=γραμμές του B.
Τελικά για το γινόμενο $C = (c_i j) = A \cdot B$ (**matrix form**) ισχύει $c_i j = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ (**coordinate form**).

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 14 & 1 & 2 & 1 \\ 30 & 23 & 4 & 3 \\ 46 & 35 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων για την εκτέλεση του γινομένου πινάκων απαιτεί: l flops για κάθε εσωτερικό γινόμενο, κάθε γραμμή χρειάζεται l flops για κάθε στοιχείο, δηλαδή $n \cdot lflops$ και όλες οι γραμμές είναι m. Συνολικά απαιτούνται $O(mnl)flops$. Εάν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί $m = n = l$ παρατηρούμε ότι απαιτούνται $O(n^3)flops$ που είναι η μέγιστη επιτρεπτή πολυπλοκότητα.
Συνεπώς η εκτέλεση ενός γινομένου πινάκων είναι πράξη με υψηλό υπολογιστικό κόστος και θα πρέπει να χρησιμοποιείται με φειδώ στις αναπτυσσόμενες μεθόδους.

3.2 Ιδιότητες Πράξεων

1. $A \cdot B$ ορίζεται, ενδεχόμενα $B \cdot A$ να μην ορίζεται. Π.χ. $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.
2. $A \cdot B$ ενδεχόμενα $\neq B \cdot A$. (Π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$)
Πολλαπλασιασμός Πινάκων ΟΧΙ μεταθετικός.
3. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ή $B = 0$.
Π.χ.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $AB = AC, A \neq 0 \nRightarrow B = C$
   (Απόδειξη: Εάν $AB = AC \Rightarrow A(B - C) = 0, A \neq 0$, (από το 3) $\nRightarrow B - C = 0$.)

5. $(AB)C = A(BC) \rightarrow$Προσεταιριστική

6. $A(B + C) = AB + AC \rightarrow$Αριστ. Επιμεριστική

7. $(A + B)C = AC + BC \rightarrow$Δεξιά Επιμεριστική

8. $k(AB) = (kA)B = A(kB), k \in \mathbb{R}$

9. $I_n A = AI_n = A$

10. $0 \cdot A = 0$

3.3 Δυνάμεις Πινάκων

Για τετραγωνικούς πίνακες $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, p \in \mathbb{N}$ ορίζεται η δύναμη:
$A^P = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{p-\text{Φορές}}$, όπου $A^0 = I_n, A^1 = A$.

3.3.1 Ιδιότητες

- $A^p \cdot A^q = A^{p+q} = A^{q+p} = A^q \cdot A^p$
- $(A^p)^q = A^{pq}$

Ορισμός: Ο τετραγωνικός πίνακας λέγεται ταυτοδύναμος ή αυτοδύναμος (idempotent) $\Leftrightarrow A^2 = A$ και μηδενοδύναμος (nilpotent) $\Leftrightarrow \exists\ p \in \mathbb{N} : A^p = 0 \Rightarrow A^k = 0, \forall k \geq p$.
Ο ελάχιστος δείκτης $p_0 \in \mathbb{N} : A^{p_0} = 0$ λέγεται δείκτης μηδενοδυναμίας του A.

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό δύναμης πίνακα, $A^p, p \in \mathbb{N}$ για έναν τετραγωνικό πίνακα A παρατηρούμε ότι η πολυπλοκότητα θα είναι της τάξης $O(pn^3)$. Επομένως για μεγάλα p, n η πολυπλοκότητα θα αυξάνει, εάν δε το $p = n$ τότε ο υπολογισμός της ποσότητας A^n καθίσταται μη αποτελεσματικός αφού θα απαιτεί $O(n^4)$. Επομένως στην ανάπτυξη μεθόδων επεξεργασίας πινάκων θα πρέπει να αποφεύγεται ο υπολογισμός δυνάμεων πινάκων.

4 Συμμετρικός Πίνακας-Ανάστροφος Πίνακας

4.1 Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός εάν τα στοιχεία που βρίσκονται συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο είναι ίσα.
$A = [a_{ij}$ συμμετρ $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, 2, ..., n$.

4.2 Ορισμός

Έστω πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ διαστάσεων $m \times n$.
Ο $n \times m$ πίνακας $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$
που προκύπτει από τον A εάν εναλλαγούν γραμμές και στήλες, λέγεται **ανάστροφος (transpose)** του A και συμβολίζεται A^T.

Πχ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Ισοδύναμος ορισμός για το συμμετρικό πραγματικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, είναι όταν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή $A = A^T$.

4.3 ΙδιότητεςΑναστρόφου

1. $(A^T)^T = A$
2. $(a \cdot A)^T = a \cdot A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (reverse law)

Άσκηση Οι πίνακες $A \cdot A^T, A^T \cdot A, A + A^T$ είναι συμμετρικοί.
Απόδειξη:

- $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$
- $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$
- $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

4.4 Αντισυμμετρικός

Εάν $A^t = -A \rightarrow$ A **αντισυμμετρικός**. Δηλαδή τα στοιχεία του ικανοποιούν τη σχέση: $a_{ji} = -a_{ij}, a_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Άσκηση 1 Κάθε πίνακας γράφεται σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού.
Απόδειξη:

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{συμμετρικός}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{αντισυμμετρικός}}$$

όπου είναι αντισυμμετρικός καθώς

$$(\underbrace{A - A^T}_{B})^T = A^T - A = -(\underbrace{A - A^T}_{B})$$

Άσκηση 2 Έστω $A \in \mathbb{R}^{10^6 \times 2}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα
$(A^T \cdot A \cdot A^T) \in \mathbb{R}^{2 \times 10^6}$, με την οικονομικότερη διαχείριση θέσεων μνήμης. Πώς είναι προτιμότερο να εκτελεσθεί ο πολλαπλασιασμός:

1. $(A^T \cdot A) \cdot A^T$
2. $A^T \cdot (A \cdot A^T)$

Λύση:
Με τον πρώτο τρόπο:

$$\underbrace{(\underbrace{\underbrace{A^T}_{2\times 10^6} \underbrace{A}_{10^6\times 2}}_{2\times 2 \text{ το γινόμενο απαιτεί } 4\times 10^6 \text{ flops}}) \underbrace{A^T}_{2\times 10^6}}_{\text{το γινόμενο απαιτεί } 4\times 10^6 \text{ flops}}$$

άρα συνολικά 8×10^6 flops.

Με τον δεύτερο τρόπο:

$$\underbrace{\underbrace{A^T}_{2\times 10^6} (\underbrace{\underbrace{A}_{10^6\times 2} \underbrace{A^T}_{2\times 10^6}}_{2\times 10^{12} \text{ flops}})}_{2 10^6 10^6 = 2 10^{12} \text{ flops}}$$

άρα συνολικά 4×10^{12} flops.

Παρατήρηση: Οι δύο τρόποι βρίσκουν το ίδιο αποτέλεσμα αλλά με πολύ σημαντική διαφορά στα απαιτούμενα flops.

ΠΑΙΖΕΙ ΡΟΛΟ Η ΣΕΙΡΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ!

5 Ερμιτιανοί Πίνακες

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται **Ερμιτιανός** (Hermitian) εάν τα στοιχεία της διαγωνίου είναι πραγματικοί αριθμοί ($a_{ii} \in \mathbb{R}$) και κάθε ζεύγος στοιχείων συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο είναι συζυγείς, δηλαδή $a_{ji} = \overline{a_{ij}}, i, j, 1, 2, \ldots, n$.

Ανάστροφος Συζυγής Έστω $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, τότε $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}$ ο συζυγής πίνακας ($\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$)

Ο ανάστροφος συζυγής ($\overline{A}^{z}$) συμβολίζεται με A^*. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ -3 & -2i \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1-i & -3 \\ 2+i & 2i \end{bmatrix}$$

5.1 Ιδιότητες

- $(A^*)^* = A$
- $(a \cdot A)^* = \overline{a} \cdot A^*$
- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$ (reverse law)

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται Ερμιτιανός εάν $A = A^*$.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. τότε:

$$\left.\begin{array}{rl} A \cdot A^* & \text{και για } A \in \mathbb{C}^{m\times n} \\ A^* \cdot A & \text{και για } A \in \mathbb{C}^{m\times n} \\ A + A^* & \\ i(A - A^*) & \end{array}\right\} \text{Ερμιτιανοί} \tag{1}$$

6 Αντίστροφος Πίνακας

6.1 Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O A λέγεται **αντιστρέψιμος** ή **μη ιδιάζων** αν $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

O πίνακας B, αν υπάρχει, ονομάζεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται A^{-1}.

Παρατήρηση: (Μοναδικότητα αντιστρόφου) Αν υπάρχει ο αντίστροφος ενός πίνακα A, είναι μοναδικός.

$$\begin{aligned} &\text{Έστω } B, \tilde{B} \text{ τέτοια ώστε} \\ &B \cdot A = A \cdot B = I \\ &\tilde{B} \cdot A = A \cdot \tilde{B} = I \end{aligned}$$

τότε

$$\tilde{B} = \tilde{B} \cdot I = \tilde{B} \cdot (A \cdot B) = (\tilde{B} \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B$$

Γενικά, αν $\exists$ ο A^{-1} είναι μοναδικός και ισχύει: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Σημαντικό

1. Αν $A \cdot B = 0 \xrightarrow{?} \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ή} \\ B = 0 \end{array} \right\}$
   OXI
   πχ. $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} & 0 \\ & \end{bmatrix}, A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Αν $A \cdot B = \left\{ \begin{array}{l} A \cdot B = A \cdot C \\ B \neq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{?} B = C$
   OXI
   γιατί:
   $A \cdot B - A \cdot C = A \cdot (B - C) = 0$
   το οποίο δεν σημαίνει: $\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ή} \\ B - C = 0 \rightarrow B = C \end{array} \right\}$

6.2 Ιδιότητες

i Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ο <u>Α αντιστρέψιμος</u> και $A \cdot B = 0 \xrightarrow{B} = 0$

ii Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ο Β αντιστρέψιμος και $A \cdot B = 0 \xrightarrow{A} = 0$

iii Αν $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ο Α αντιστρέψιμος και $A \cdot B = A \cdot C \xrightarrow{B} = C$

iv Αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} αντιστρέψιμος και ισχύει:
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^{*} = (A^{*})^{-1}$, $A^{*} = (\overline{A})^{t}$

v Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι τότε:
ο $A \cdot B$ αντιστρέψιμος και ισχύει: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

vi Αν ο πίνακας Α αντιστρέψιμος τότε:
$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}, \forall k \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), k \neq 0$

Απόδειξη:

i Α αντιστρέψιμος $\xrightarrow{\exists}$ A^{-1} τέτοιο ώστε $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{aligned} A \cdot B = 0 &\rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot B = A^{-1} \cdot 0 \\ &\rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

ii Ομοίως με το (i).

iii Α αντιστρέψιμος $\rightarrow \exists A^{-1}$ τέτοιο ώστε $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{aligned} A \cdot B = A \cdot C &\rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C \\ &\rightarrow B = C \end{aligned}$$

iv Α αντιστρέψιμος $\rightarrow \exists A^{-1}$ τέτοιο ώστε $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$
Παρατηρούμε ότι για τον A^{-1} υπάρχει Α: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \rightarrow A^{-1}$ αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$

v

$$\begin{aligned} A &: A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \\ B &: B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = I \\ (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = I \\ (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = I \end{aligned}$$

Άρα ο AB αντιστρέψιμος και $A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

vi

$$\begin{aligned} A : A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \\ (k \cdot A) \cdot (\frac{1}{k} \cdot A^{-1}) = k \cdot \frac{1}{k} \cdot A \cdot A^{-1} = I \\ (\frac{1}{k} \cdot A^{-1}) \cdot (k \cdot A) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot A^{-1} \cdot A = I \end{aligned}$$

Άρα, $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}, k \neq 0$

7 Υποπίνακες και Διαμερίσεις Πινάκων

Δοθέντος ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, αν μερικές γραμμές ή στήλες αυτού διαγραφούν, τότε ο πίνακας που απομένει ονομάζεται υποπίνακας του A.

πχ. αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, τότε οι πίνακες $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, είναι μερικοί υποπίνακες του A.

Με κατάλληλες γραμμές οριζόντιες και κατακόρυφες μπορώ να χωρίσω έναν πίνακα σε υποπίνακες.

$$\text{Αν } A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \overbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}^{\text{Block Πίνακας}}$$

όπου $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Μπορεί με διαμέριση των πινάκων να διευκολυνθούν οι πράξεις. Αν πχ.

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -7 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right] \to$$

$$\to AB = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \end{array}\right]}_{1\times 2} \underbrace{\left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{21} \end{array}\right]}_{2\times 1} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

Οι διαχωρισμένοι πίνακες μπορεί να διευκολύνουν στην εκτέλεση πράξεων, ιδιαίτερα σε πίνακες μεγάλης διάστασης.

Άσκηση Να υπολογιστεί το γινόμενο:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & -a_{11} & -a_{12} \\ c_{21} & c_{22} & -a_{21} & -a_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & A \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -A \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2C & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

8 Ορίζουσα Πίνακα

8.1 Ορισμός

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα $A^{n\times n}$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό βαθμωτό μέγεθος που ονομάζεται ορίζουσα του A, συμβολίζεται $det(A)$ και του οποίου η τιμή είναι συνάρτηση των εισόδων του πίνακα. .

- Για ένα 2×2 πίνακα $A = [a_{ij}], i, j = 1, 2, \quad det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Για ένα 3×3 πίνακα $A = [a_{ij}], \quad detA = a_{11}det(A_{11}) - a_{12}det(A_{12}) + a_{13}det(A_{13})$, όπου A_{1j} είναι 2×2 υποπίνακας του A που προέκυψε αφαιρώντας την $1^{\underline{η}}$ γραμμή και την j-στήλη.
- Για έναν $n \times n$ πίνακα $A = [a_{ij}]$ ισχύει:
  $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}) \qquad (\rightarrow$ έχει $n!$ όρους)

  Το παραπάνω ανάπτυγμα λέγεται ανάπτυγμα Laplace ως προς τη i-γραμμή του πίνακα.

  Ο τύπος του αναπτύγματος Laplace έχει μόνο θεωρητικό ενδιαφέρον και ποτέ δε χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα διάστασης $n \times n$ λόγω της της μεγάλης υπολογιστικής πολυπλοκότητας που τον χαρακτηρίζει. Συγκεκριμένα, το παραπάνω ανάπτυγμα απαιτεί n πολλαπλασιασμούς και n υπολογισμούς της ορίζουσας ενός $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα. Εφαρμόζοντας ξανά το ανάπτυγμα Laplace, βλέπουμε ότι κάθε ορίζουσα περιέχει $(n-1)$ πολλαπλασιασμούς που απαιτούν τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός $(n-2) \times (n-2)$ πίνακα. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία, τελικά απαιτούνται $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 1 = n!$ πράξεις.

8.2 Ιδιότητες Οριζουσών

1. $det(A) = det(A^T)$
2. $det(a \cdot A) = a^n \cdot det(A)$
3. $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
4. Εάν δύο γραμμές ή στήλες του A είναι ίδιες $\Rightarrow det(A) = 0$
5. Εάν ο B προκύπτει από εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών του A $\Rightarrow det(B) = -det(A)$
6. Η ορίζουσα άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του. (Ισχύει και για block μορφή πίνακα)
7. $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
8. $det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.

Παρατήρηση:
Η ιδιότητα 6 αποτελεί μέθοδο υπολογισμού της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα.

9 Ορθογώνιοι Πίνακες

9.1 Ορισμός

Εάν $U^T \cdot U = U \cdot U^T = I \Rightarrow U$ ορθογώνιος.

9.2 Ιδιότητες

1. $U^{-1} = U^T$
2. Γινόμενο ορθογωνίων = ορθογώνιος
3. $det(U^T \cdot U) = det(I) = 1 \Rightarrow (detU)^2 = 1 \Rightarrow detU = \pm 1$

10 Block Πίνακες

10.1 Θεώρημα

Έστω ο block πίνακας:

$A = \begin{bmatrix} \overbrace{A_{11}}^{k} & \overbrace{A_{12}}^{m} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$,όπου $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ A_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k},\ A_{12} \in \mathbb{C}^{k\times m},\ A_{22} \in \mathbb{C}^{m\times m},\ det(A_{11}) \neq 0,\ det(A_{22}) \neq 0,\ k+m=n.$

Τότε,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

με την υπόθεση ότι $\exists$ οι A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}.

Απόδειξη: $det(A) = det(A_{11}) \cdot det(A_{22} \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Έστω $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ ο αντίστροφος του A.

Τότε:

$AB = I_n$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Έτσι,

$$A_{11}B_{11} + A_{12}\overbrace{B_{21}}^{0} = I_k \Rightarrow A_{11}B_{11} = I_k \quad \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1}$$
$$A_{11}B_{12} + A_{12}\overbrace{B_{22}}^{A_{22}^{-1}} = 0 \quad \Rightarrow B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$
$$A_{22}B_{21} = 0 \quad \xRightarrow{A_{22} \quad \text{αντιστρ.}} B_{21} = 0 \quad [\text{από προηγούμενη πρόταση } (1)]$$
$$A_{22}B_{22} = I_m \quad \Rightarrow B_{22} = A_{22}^{-1}$$

Άρα, $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

<u>Παρατήρηση:</u>

$$\exists \quad \text{ο} \quad A^{-1} \Leftrightarrow \exists A_{11}^{-1}, \quad A_{22}^{-1}$$

Εφαρμογή 1 (αντίστροφος block πίνακα)

Έστω ο block πίνακας $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$αντιστρέψιμος, $\quad A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times m}, \quad A_{21} \in \mathbb{R}^{m\times k}, \quad A_{22}^{m\times m}$

Να βρεθεί ο A^{-1}

<u>Απόδειξη:</u>

$(A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\exists \text{ οι } A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1})$

Θα γράψουμε τον πίνακα A ως γινόμενο (κάτω τριγ.)(διαγώνιος)(άνω τριγ.). Κάνοντας πράξεις επαληθεύεται ότι:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_m \end{bmatrix}^{-1}$$

το οποίο αν $\exists A_{11}^{-1}, \quad {A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}}^{-1}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I_k^{-1} & -I_k^{-1}A_{11}^{-1}A_{12}I_m^{-1} \\ 0 & I_m^{-1} \end{bmatrix}}_{A^*} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & {A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} I_k^{-1} & 0 \\ -I_m^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}I_k{-1} & I_m^{-1} \end{bmatrix}}_{A^{**}}$$

$$\text{όπου} \quad A^* = \begin{bmatrix} I_k & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \text{και} \quad A^{**} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_m \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι (με $n = k + m$). ν.δ.ο:

i $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & A_{12} \cdot {A_{22}}^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ {A_{22}}^{-1}A_{21} & I_m \end{bmatrix}$

ii Αν $\exists$ ο $(A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21})^{-1}$ τότε ισχύει:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -{A_{22}}^{-1}A_{21} & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21}}^{-1} & 0 \\ 0 & {A_{22}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I_k & -A_{12}{A_{22}}^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

10.2 Ορίζουσα Block Πίνακα

Εφαρμογή 3 (Ορίζουσα block πίνακα)

Έστω ο block πίνακας: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, όπου A_{11} αντιστρέψιμος.

Να βρεθεί detA.

Απόδειξη

Από εφαρμογή 1,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A_{21} \cdot {A_{11}}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}{A_{11}}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k & {A_{11}}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$detA = det(BCD) = detB \cdot detC \cdot detD$$

$$detA = det \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A_{21} \cdot {A_{11}}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \cdot det \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}{A_{11}}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \cdot det \begin{bmatrix} I_k & {A_{11}}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} &\Rightarrow detA = detB \cdot detD \\ &= detI_k \cdot detI_m \cdot detA_{11} \cdot det(A_{22} - A_{21}{A_{11}}^{-1}A_{12}) \cdot detI_n \cdot detI_m \\ &= detA_{11} \cdot (A_{22} - A_{21}{A_{11}}^{-1}A_{12}) \end{aligned}$$