F ελεύθερη αβελιανή με $r(F)=n$. Αν $H \leqslant F$ ελεύθερη με $r(H)=n$, τότε η $F\Big/H$ πεπερασμένη.

<u>**Απόδειξη:**</u> Υποθέτουμε ότι η $F\Big/H$ δεν είναι πεπερασμένη. Τότε η $F\Big/H$ έχει ένα στοιχείο $\alpha+H$ απείρου τάξεως. Αυτό γιατί η F είναι πεπερασμένα παραγόμενη, άρα και η $F\Big/H$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Αν όλοι οι γεννήτορες της $F\Big/H$ ήταν πεπερασμένης τάξης, τότε η $F\Big/H$, ως αβελιανή, θα ήταν πεπερασμένη.

Αν λοιπόν το σύμπλοκο $\alpha+H \in F\Big/H$ είναι άπειρης τάξης, τότε θεωρούμε την υποομάδα $\langle\alpha\rangle+H$ της F. Το α είναι απείρου τάξεως γιατί αν $k\alpha=0$, για κάποιον θετικό ακέραιο k, τότε και $k(\alpha+H)=H=0_{F/H}$, άτοπο γιατί το $\alpha+H$ ειναι απείρου τάξεως.

Τώρα, το άθροισμα $\langle\alpha\rangle+H$ είναι ευθύ. Πράγματι, αν $x=\lambda\alpha\in\langle\alpha\rangle\cap H\subseteq H$, για κάποιον $\lambda\in\mathbb{Z}$, τότε $\lambda(\alpha+H)=H=0_{F/H}$. Εφόσον το σύμπλοκο $\alpha+H$ είναι άπειρης τάξης, έπεται ότι $\lambda=0$, άρα $x=\lambda\alpha=0$.

Θεωρούμε λοιπόν την υποομάδα $H'=\langle\alpha\rangle\oplus H$ της F. Η H' είναι ελεύθερη αβελιανή με $rank(H')=rank(\langle\alpha\rangle\oplus H)=n+1$. Άτοπο γιατί $H'\leqslant F$ και κατά συνέπεια $rank(H')\leq rank(F)=n$. ■