

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ

12-09-2025

Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα. Δικαιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Θέμα 1°: Έστω G ομάδα τάξης $|G| = p^k$, όπου p πρώτος και k θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι η $Z(G) \neq 1$ και ότι η G είναι μηδενοδύναμη.

Απόδειξη: Αν η G είναι αβελιανή, τότε η σειρά $G \triangleright 1$ είναι μια κεντρική σειρά. Έστω G μη αβελιανή. Από την εξίσωση κλάσεων $|G| = |Z(G)| + \sum |G : C_G(x_i)|$, όπου $C_G(x_i) < G$, (γιατί αν $C_G(x_i) = G$, τότε $x_i \in Z(G)$) συμπεραίνουμε ότι $1 < |G : C_G(x_i)| \mid |G| = p^k$. Κατά συνέπεια $p \mid |Z(G)|$, άρα $|Z(G)| \neq 1$. Επειδή $|Z(G)| \mid |G| = p^k$, έπεται ότι $|Z(G)| = p^r$, όπου $1 \leq r < k$. Συνεπώς $|G/Z(G)| = p^{k-r}$, δηλαδή η $G/Z(G)$ είναι μια πεπερασμένη p -ομάδα με τάξη μικρότερη της τάξης της G . Με επαγωγή στην τάξη της ομάδας συμπεραίνουμε ότι η $G/Z(G)$ έχει μια κεντρική σειρά $G/Z(G) = N'_0 \triangleright N'_1 \triangleright N'_2 \triangleright \cdots \triangleright N'_\nu = 1_{G/Z(G)}$, όπου $N'_{i+1}/N'_i \leq Z(G/Z(G)/N'_i)$, για κάθε i . Οι N'_i είναι της μορφής $N_i/Z(G)$ και κανονικές στην $G/Z(G)$, άρα οι N_i είναι κανονικές στην G . Επειδή $N_{i+1}/Z(G) / N_i/Z(G) \cong N'_{i+1}/N'_i$, η σχέση $N'_{i+1}/N'_i \leq Z(G/Z(G)/N'_i)$ γράφεται $N_{i+1}/N_i \leq Z(G/N_i)$, για κάθε i . Παίρνουμε λοιπόν την κεντρική σειρά της G : $G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \cdots \triangleright N_\nu = Z(G) \triangleright 1$. ■

Θέμα 2°: Έστω G ομάδα τάξης 110, η οποία δρα επί του συνόλου X με $|X| = 10$. Υποθέτουμε ότι η δράση είναι μεταβατική, δηλαδή υπάρχει μία μόνον τροχιά. Δείξτε ότι αν $x_1, x_2 \in X$, τότε $\text{Stab}_G(x_1) = \text{Stab}_G(x_2)$.

Απόδειξη: Έστω $P = \text{Stab}_G(x_1)$, για κάποιο $x_1 \in X$. Επειδή η δράση είναι μεταβατική $|X| = |G : P|$, δηλαδή $10 = \frac{110}{|P|} \Rightarrow |P| = 11$. Επομένως η P είναι μια 11-υποομάδα του Sylow της G , με $|G| = 2 \cdot 5 \cdot 11$. Το πλήθος k των 11-υποομάδων του Sylow της G μπορεί να είναι 1 ή 2 ή 5 ή 10. Αλλά $k \not\equiv 1 \pmod{11}$, για κάθε $k = 2, 5, 10$. Αναγκαστικά $k = 1$, δηλαδή $P = \text{Stab}_G(x_1) \triangleleft G$. Επειδή το X αποτελείται από μία μόνον τροχιά, η σταθεροποιούσα $\text{Stab}_G(x_2)$ οποιουδήποτε σημείου x_2 του X είναι συζυγής της $P = \text{Stab}_G(x_1) \triangleleft G$ και άρα ταυτίζεται με την P . ■

Θέμα 3°: (i) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $K \triangleleft G$. Αν p πρώτος διαιρέτης του $|G|$, δείξτε ότι μια p -υποομάδα του Sylow της G/K είναι της μορφής KP/K , όπου P μια p -υποομάδα του Sylow της G .

(ii) Έστω $K \triangleleft G$, όπου $|G| < \infty$ και P μια Sylow p -υποομάδα της K . Δείξτε ότι $G = KN_G(P)$.

Απόδειξη: (i) Η μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί την τάξη $\frac{|G|}{|K|}$ της G/K ισούται με $p^{\alpha-\beta}$, όπου p^α η μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί την τάξη της G και p^β η μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί την τάξη της K . Επομένως η τάξη μιας p -υποομάδας του Sylow της G/K ισούται με $p^{\alpha-\beta}$.

Έστω P' μια p -υποομάδα του Sylow της K τάξης p^β , όπου $\beta \geq 0$. Αυτή περιέχεται σε μια μέγιστη p -υποομάδα της G , έστω P , η οποία είναι p -υποομάδα του Sylow της G τάξης p^α . Επειδή $P' \leq P$ και $P' \leq K$, έπεται ότι $P' \leq P \cap K$. Η $P \cap K$ είναι προφανώς μια p -υποομάδα της K που περιέχει μια μέγιστη p -υποομάδα (άρα p -Sylow) της K , δηλαδή την P' . Επομένως $P' = P \cap K$. Επειδή η K είναι κανονική στην G , και η $P' = P \cap K$ είναι κανονική στην P . Επίσης $|P/P'| = p^{\alpha-\beta}$. Ακόμη, $P/P' = P/(P \cap K) \cong PK/K$. Επομένως η PK/K είναι

μια p -υποομάδα του Sylow της G/K .

Αντιστρόφως, έστω L/K μια p -υποομάδα του Sylow της G/K . Συνεπώς οι L/K και PK/K είναι συζυγείς στην G/K .

Άρα υπάρχει σύμπλοκο $gK \in G/K$, τέτοιο ώστε $L/K = (gK) \left(PK/K \right) (gK)^{-1} = gPKg^{-1}/K = (gPg^{-1})(gKg^{-1})/K \stackrel{K \triangleleft G}{=} (gPg^{-1})K/K$. Η $P_1 = gPg^{-1}$ είναι μια p -υποομάδα του Sylow της G . Επομένως $L/K = P_1K/K$.

(ii) Επειδή οι K και $N_G(P)$ είναι υποομάδες της G , προφανώς $KN_G(P) \subseteq G$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της G ανήκει στο $KN_G(P)$. Έστω $g \in G$. Επειδή $K \triangleleft G$, $gKg^{-1} = K$. Άρα, εφόσον $P \leq K$, έχουμε και $gPg^{-1} \leq K$. Οι υποομάδες P και gPg^{-1} είναι λοιπόν p -Sylow υποομάδες της K , άρα συζυγείς στην K . Επομένως υπάρχει $x \in K$, τέτοιο ώστε $x^{-1}gPg^{-1}x = P \Leftrightarrow x^{-1}gP(x^{-1}g)^{-1} = P$. Άρα $x^{-1}g \in N_G(P) \Leftrightarrow g \in xN_G(P) \subseteq KN_G(P)$. ■

Θέμα 4°: Δείξτε ότι η A_4 δεν περιέχει υποομάδα τάξης 6.

Απόδειξη: Έστω $H \leq A_4$ με $|H| = 6$. Εφόσον $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$, η H είναι δείκτου 2 στην A_4 , άρα κανονική στην A_4 και $|A_4/H| = 2$. Επομένως $a^2 \in H$, για κάθε $a \in A_4$. Άρα και $a^4 = (a^2)^2 \in H$, για κάθε $a \in A_4$. Αν λοιπόν a είναι τυχόν κύκλος μήκους 3 στην A_4 , τότε $a^4 \in H$. Επομένως $a^4 = a^3 \cdot a = a \in H$, γιατί $a^3 = 1$, για κάθε κύκλο μήκους 3. Επομένως η H περιέχει όλους τους κύκλους μήκους 3, άρα $H = A_4$, άτοπο. ■

Θέμα 5°: Έστω G ομάδα, με $|G| = 4 \cdot p^k$, όπου p πρώτος και k θετικός ακέραιος. Είναι η G επιλύσιμη και γιατί;

Λύση: Αν $p = 2$, τότε $|G| = 2^{k+2}$, μια πεπερασμένη 2-ομάδα, και με βάση το 1° θέμα, μηδενοδύναμη, άρα επιλύσιμη. Αν $p \geq 5$, τότε η G περιέχει μια p -υποομάδα του Sylow P τάξεως p^k . Τότε η G μπορεί να περιέχει 1, 2 ή 4 p -υποομάδες του Sylow. Για $p \geq 5$ έχουμε $2, 4 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Άρα υπάρχει μοναδική p -υποομάδα του Sylow, η οποία είναι κανονική στην G . Επειδή $|G/P| = 4$, η G/P είναι αβελιανή, άρα επιλύσιμη. Εφόσον οι P και G/P είναι επιλύσιμες, και η G είναι επιλύσιμη.

Απομένει η περίπτωση $p = 3$. Έχουμε $1, 4 \equiv 1 \pmod{3}$ και $2 \not\equiv 1 \pmod{3}$. Αν το πλήθος των 3-υποομάδων είναι 1, δηλαδή μοναδική 3-υποομάδα, εργαζόμαστε όπως προηγουμένως. Έστω ότι έχουμε 4 υποομάδες Sylow για τον πρώτο 3. Αν P είναι μία από αυτές, τότε το πλήθος των αριστερών συμπλόκων της P στην G είναι 4. Έστω $X = \{x_1P, x_2P, x_3P, x_4P\}$ το σύνολό τους, όπου $x_1 = 1$. Η G δρα μέσω αριστερού πολλαπλασιασμού μεταβατικά επί του X . Η δράση αυτή επάγεται έναν ομομορφισμό $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(X) \cong S_4$ με $\rho(g)(x_iP) = (gx_i)P = x_jP$, για κάποιο $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Γνωρίζουμε ότι $\text{Ker} \rho = \bigcap_{g \in G} gPg^{-1} \triangleleft G$ και $\text{Im} \rho \leq \text{Sym}(X) \cong S_4$. Επειδή η S_4

είναι επιλύσιμη, και η $\text{Im} \rho \cong G/\text{Ker} \rho$ είναι επιλύσιμη. Επίσης, $\text{Ker} \rho = \bigcap_{g \in G} gPg^{-1} \leq P$ και η P

είναι επιλύσιμη, μάλιστα μηδενοδύναμη. Επομένως και η υποομάδα της $\text{Ker} \rho$ είναι επιλύσιμη. Εφόσον $G/\text{Ker} \rho$ και $\text{Ker} \rho$ επιλύσιμες, και η G είναι επιλύσιμη. ■