

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ

20-01-2025

Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1°: Έστω G ομάδα τάξης $|G| = 8075 = 5^2 \cdot 17 \cdot 19$. Δείξτε ότι η G είναι επιλύσιμη. Είναι η G μηδενοδύναμη;

Λύση: Το πλήθος των κυκλικών ομάδων τάξης 19 δεν μπορεί να είναι 17, $5, 5^2 \equiv 6 \pmod{19}$, $17 \cdot 5 \equiv -2 \cdot 5 = -10 \equiv 9 \pmod{19}$ και $5^2 \cdot 17 \equiv 6 \cdot (-2) = -12 \equiv 7 \pmod{19}$. Επομένως υπάρχει μοναδική κυκλική υποομάδα P_{19} τάξεως 19, η οποία είναι κανονική.

Το πλήθος των υποομάδων τάξης 17 δεν μπορεί να είναι $19 \equiv 2 \pmod{17}$, $5, 5^2 \equiv 8 \pmod{17}$, $19 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 5 = 10 \pmod{17}$ και $19 \cdot 5^2 \equiv 2 \cdot 8 = 16 \pmod{17}$. Επομένως υπάρχει μοναδική κυκλική υποομάδα P_{17} τάξεως 17, η οποία είναι κανονική.

Το πλήθος των υποομάδων τάξης $5^2 = 25$ δεν μπορεί να είναι $17 \equiv 2 \pmod{5}$, $19 \equiv 4 \pmod{5}$ και $17 \cdot 19 \equiv 2 \cdot 4 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$. Άρα υπάρχει μοναδική υποομάδα P_5 τάξης $5^2 = 25$.

Συνεπώς η G είναι το ευθύ γινόμενο των υποομάδων της του Sylow, άρα μηδενοδύναμη, άρα επιλύσιμη.

Παρατήρηση φοιτητή: Η τάξη της P_5 είναι της μορφής p^2 , p πρώτος, άρα αβελιανή. Η G ως ευθύ γινόμενο αβελιανών, είναι αβελιανή, άρα μηδενοδύναμη, άρα επιλύσιμη. Δεν είχα αυτό στο μυαλό μου. Ήθελα απλώς να φτιάξω μια μηδενοδύναμη. Δοκιμάστε για $|G| = 5^3 \cdot 17 \cdot 19$. ■

Θέμα 2°: (i) Έστω H γνήσια υποομάδα της G . Δείξτε ότι $G = \langle G \setminus H \rangle$.

(ii) Έστω S, T δύο μη κενά (όχι κατ' ανάγκην ξένα) υποσύνολα της πεπερασμένης ομάδας G . Δείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής:

α) $G = ST$, όπου $ST = \{st \mid s \in S \text{ και } t \in T\}$ και **β)** $|G| \geq |S| + |T|$.

(Υπόδειξη: Αν $G \neq ST$ αντικαταστήστε το T με ένα ισοπληθικό T' , ούτως ώστε $S \cap T' = \emptyset$).

Λύση: (i) Έστω $g \in G \setminus H$. Εφόσον $g \notin H$, τότε και $g^{-1} \notin H$. Επίσης, για κάθε $h \in H$, $gh \notin H$, γιατί αν $gh = h' \in H$, τότε $g = h'h^{-1} \in H$. Επομένως $g^{-1}, gh \notin H$ και συνεπώς $g^{-1} \cdot gh = h \in \langle G \setminus H \rangle$. Και αυτό για κάθε $h \in H$. Άρα $H \subseteq \langle G \setminus H \rangle \Rightarrow G = \langle G \setminus H \rangle$.

(ii) Έστω $g \in G$ με $g \notin ST$. Έστω $T' = \{gt^{-1} \mid t \in T\}$. Προφανώς $|T'| = |T|$. Αν $s \in S \cap T'$, τότε θα υπήρχε $t \in T$ με $s = gt^{-1} \Leftrightarrow g = st \in ST$, άτοπο. Επομένως S και T ξένα υποσύνολα της G και κατά συνέπεια $|G| \geq |S \cup T'| = |S| + |T'| = |S| + |T|$. ■

Σχόλιο: Το **(ii)** έχει ως συνέπεια το εξής: Σε ένα πεπερασμένο σώμα κάθε στοιχείο είναι άθροισμα δύο τετραγώνων, έστω και κατά τετριμμένο τρόπο, δηλαδή έστω και $x = \alpha^2 = \alpha^2 + 0^2$. Εδώ θεωρούμε την προσθετική ομάδα του σώματος και $S = T =$ σύνολο των τετραγώνων. Ποια στοιχεία δίνουν το ίδιο τετράγωνο; Τα ίσα ή αντίθετα. Αν η χαρακτηριστική του σώματος $\mathbb{F}$ είναι 2, τα αντίθετα είναι και ίσα, δηλαδή ο ομομορφισμός του Frobenius είναι μονομορφισμός και επειδή το $\mathbb{F}$ είναι πεπερασμένο, είναι και επί. Σ' αυτή την περίπτωση όλα τα στοιχεία είναι τετράγωνα. Αν $\text{char} \mathbb{F} = p$ περιττός, τότε και $|\mathbb{F}| = 2n + 1$, περιττός. Χωρίζουμε τα μη μηδενικά στοιχεία σε ξένα ανά δύο δισύνολα αντιθέτων $\{x, -x\}$. Διαφορετικά δισύνολα δίνουν διαφορετικά τετράγωνα. Άρα n διαφορετικά τετράγωνα και μαζί με το 0, $n + 1$ συνολικά διαφορετικά τετράγωνα. Αν υπήρχε $\alpha \in \mathbb{F}$ που δεν γραφόταν ως άθροισμα τετραγώνων, τότε θεωρούμε το σύνολο $T' = \{\alpha - x^2 \mid x \in \mathbb{F}\}$. Προφανώς $|T'| = |T| = n + 1$. Αν $y^2 \in T' \cap T$, τότε για κάποιο $x \in \mathbb{F}$ θα είχαμε $y^2 = \alpha - x^2 \Leftrightarrow \alpha = x^2 + y^2$, άτοπο. Επομένως $T' \cap T = \emptyset$ και κατά συνέπεια $2n + 1 = |\mathbb{F}| \geq |T' \cup T| = |T'| + |T| = 2|T| = 2n + 2$, άτοπο.

Θέμα 3°: Έστω $\mathbb{F}$ ένα σώμα και U η πολλαπλασιαστική ομάδα των πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Δείξτε ότι η U είναι μηδενοδύναμη κλάσεως 2, δηλαδή $U = U_0 \triangleright U_1 \triangleright U_2 = 1$ είναι η κατώτερη κεντρική σειρά της U .

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\gamma - \beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τον μεταθέτη

$$\begin{aligned} [A, B] &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1\gamma_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\gamma_1 - \beta_1 \\ 0 & 1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 & \alpha_2\gamma_2 - \beta_2 \\ 0 & 1 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 + \beta_2 \\ 0 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 & \alpha_2\gamma_2 - \beta_2 \\ 0 & 1 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Επομένως $U' = U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{F} \right\} \cong (\mathbb{F}, +)$.

Έστω τώρα $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_1$. Τότε $[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\gamma - \beta \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta + x \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\gamma - \beta - x \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Επομένως $U_2 = 1$. ■

Θέμα 4°: (i) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $K \triangleleft G$. Αν p πρώτος διαιρέτης του $|G|$, δείξτε ότι μια p -υποομάδα του Sylow της G/K είναι της μορφής KP/K , όπου P μια p -υποομάδα του Sylow της G .

(ii) Έστω $K \triangleleft G$, όπου $|G| < \infty$ και P μια Sylow p -υποομάδα της K . Δείξτε ότι $G = KN_G(P)$.

Λύση: (i) Έστω $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, όπου $p_1, p_2, \dots, p_k$ διαφορετικοί πρώτοι και $\alpha_i > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$. Επειδή $|K| \mid |G|$, έπεται ότι $|K| = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, όπου $\alpha_i \geq \beta_i \geq 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και επομένως $|G/K| = p_1^{\alpha_1 - \beta_1} p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \cdots p_k^{\alpha_k - \beta_k}$. Επομένως η G/K έχει μια p_i -Sylow υποομάδα αν και μόνον αν $\alpha_i > \beta_i$. Έστω $\alpha_i > \beta_i$, για κάποιο i . Χάριν απλότητας θέτουμε $p = p_i$, $\alpha = \alpha_i$ και $\beta = \beta_i$. Έστω P' μια p -υποομάδα του Sylow της K ,

τάξεως p^β . (Ενδεχομένως $\beta = 0$, οπότε $P' = 1$, αλλά αυτό δεν έχει σημασία). Η P' περιέχεται σε μια μέγιστη p -υποομάδα P της G , άρα Sylow, τάξεως p^α . Προφανώς $P' = P \cap K$. Από το 2° θεώρημα ισομορφισμών έχουμε $P/P' = P/P \cap K \cong KP/K$, εφόσον $K \triangleleft G$. Άρα $|KP/K| = |P/P'| = p^{\alpha-\beta}$ και συνεπώς η KP/K είναι μια p -υποομάδα του Sylow της G/K .

Αντιστρόφως, έστω L/K μια p -υποομάδα του Sylow της G/K . Οι p -Sylow υποομάδες L/K και KP/K της G/K είναι συζυγείς. Επομένως υπάρχει σύμπλοκο $K \triangleleft G$ PK/K της G/K είναι συζυγείς. Επομένως υπάρχει σύμπλοκο

$\alpha K \in G/K$, τέτοιο ώστε $\alpha K \cdot L/K \cdot \alpha^{-1}K = PK/K$. Άρα για κάθε $x \in L$, θα πρέπει $\alpha K \cdot xK \cdot \alpha^{-1}K = \beta \gamma K$, όπου $\beta \in P$ και $\gamma \in K$, ισοδύναμα $\alpha x \alpha^{-1}K = \beta K \Leftrightarrow \beta^{-1} \alpha x \alpha^{-1} \in K \subseteq PK \Rightarrow \alpha x \alpha^{-1} \in \beta PK = PK$. Συνεπώς $\alpha L \alpha^{-1} \subseteq PK \Rightarrow |L| = |\alpha L \alpha^{-1}| \leq |PK|$.

Αλλά $|L/K| = p^{\alpha-\beta} = |PK/K| \Leftrightarrow \frac{|L|}{|K|} = \frac{|PK|}{|K|} \Leftrightarrow |L| = |PK|$. Επομένως $\alpha L \alpha^{-1} = PK \Leftrightarrow L = \alpha^{-1} P \alpha \cdot \alpha^{-1} K \alpha = P_1 K$, όπου $P_1 = \alpha^{-1} P \alpha$ μια p -υποομάδα του Sylow της G . Συνεπώς $L/K = P_1 K/K$.

(ii) Έστω $g \in G$. Επειδή $K \triangleleft G$, $gPg^{-1} \leq gKg^{-1} = K$, άρα οι P και gPg^{-1} είναι δύο Sylow υποομάδες της K που αντιστοιχούν στον ίδιο πρώτο p . Συνεπώς είναι συζυγείς στην K και επομένως $gPg^{-1} = \alpha P \alpha^{-1}$, για κάποιο $\alpha \in K$. Άρα $\alpha^{-1} g P (\alpha^{-1} g)^{-1} = P \Leftrightarrow \alpha^{-1} g \in N_G(P) \Leftrightarrow g \in \alpha N_G(P) \subseteq K N_G(P)$. Άρα $G = K N_G(P)$. ■

Θέμα 5°: (i) Έστω G αβελιανή ομάδα, $N \leq G$ και η G/N είναι ελεύθερη αβελιανή. Δείξτε ότι υπάρχει ελεύθερη αβελιανή υποομάδα F της G με $F \cong G/N$ και $G = F \oplus N$.

(ii) Εξετάστε αν οι (προσθετικές) αβελιανές ομάδες $G_1 = \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{39}$ και $G_2 = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{55} \oplus \mathbb{Z}_{26}$ είναι ισόμορφες.

Λύση: (i) Έστω $G/N = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}(\alpha_i + N)$ (προσθετικός συμβολισμός), όπου $\alpha_i \in G$, για κάθε

$i \in I$. Έστω $F = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \leq G$. Θα δείξουμε ότι το άθροισμα $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ είναι ευθύ και κατά συνέπεια $F \cong G/N$ γιατί θα έχουν τον ίδιο βαθμό. (rank).

Έστω λοιπόν $i_1, i_2, \dots, i_k$ διαφορετικοί δείκτες από το σύνολο I και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 \alpha_{i_1} + \lambda_2 \alpha_{i_2} + \dots + \lambda_k \alpha_{i_k} = 0$. Τότε όμως $\lambda_1(\alpha_{i_1} + N) + \lambda_2(\alpha_{i_2} + N) + \dots + \lambda_k(\alpha_{i_k} + N) = \lambda_1 \alpha_{i_1} + \lambda_2 \alpha_{i_2} + \dots + \lambda_k \alpha_{i_k} + N = N = 0_{G/N}$ και, επειδή το άθροισμα $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}(\alpha_i + N)$ είναι ευθύ, έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Επομένως

$F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}(\alpha_i + N) = G/N$ και επομένως η F είναι ελεύθερη επί του συνόλου

$\{\alpha_i \mid i \in I\}$. Έστω $x \in F \cap N$. Τότε $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{i_j} \Rightarrow 0_{G/N} = N = x + N = \sum_{j=1}^k \lambda_j(\alpha_{i_j} + N)$

και επειδή η G/N είναι ελεύθερη αβελιανή, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, άρα $x = 0$. Το άθροισμα λοιπόν $F + N$ είναι ευθύ. Αν $y \in G$, τότε $y + N \in G/N \Rightarrow y + N = \sum_{j=1}^k \lambda_j(\alpha_{i_j} + N) =$

$= \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{i_j} \right) + N \Rightarrow x - \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{i_j} = z \in N \Rightarrow x = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{i_j} + z \in F + N$. Επομένως

$G = F + N$ και επειδή $F \cap N = 0$, έπεται ότι $G = F \oplus N$.

(ii) $G_1 = \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{39} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{13} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{13}$

και $G_2 = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{55} \oplus \mathbb{Z}_{26} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{13} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{13}$.
Επομένως $G_1 \cong G_2$. ■