Περί της επιλυσιμότητας για τις ομάδες τάξεως p^2q και τάξεως $4p^n$, $n \geq 1$, όταν οι p, q είναι διαφορετικοί πρώτοι.

Κατ' αρχάς αν πρόκειται για αβελιανές ομάδες τότε το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, θεωρώντας την σειρά $G \rhd \{1\}$, όπου ${G}/{\{1\}} \cong G$ αβελιανή. Ας υποθέσουμε ότι δεν έχουμε αβελιανές ομάδες.
Ας αρχίσουμε με την περίπτωση όπου $|G| = p^2q$. Έχουμε δει σε άσκηση πως η G έχει μοναδική q-υποομάδα του Sylow, έστω Q, και άρα $Q \lhd G$. Η Q είναι κυκλική τάξεως q και άρα αβελιανή. Επίσης $\left|{G}/{Q}\right| = p^2$, η οποία είναι αβελιανή ομάδα (έχουμε δει σε άσκηση στην τάξη ότι οι ομάδες τάξης p^2 συμπίπτουν με το κέντρο τους συνεπώς είναι αβελιανές). Επομένως έχουμε την επιλύσιμη σειρά $G \rhd Q \rhd \{1\}$ με την ${G}/{Q}$ να είναι αβελιανή και την ${Q}/{\{1\}} \cong Q$ κυκλική τάξης q.
Τώρα, αν έχουμε $|G| = 4p^n$, $n \geq 1$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1.) $p = 2$. Τότε $|G| = 2^{n+2}$ και η G είναι μια 2-ομάδα, και μάλιστα πεπερασμένη. Έτσι σύμφωνα με πόρισμα είναι επιλύσιμη.
2.) Αν $p \geq 5$, τότε έχουμε δει πως η G έχει μοναδική p-υποομάδα του Sylow, έστω P, και άρα αυτή είναι κανονική. Έχουμε δηλαδή ότι $\left|{G}/{P}\right| = \frac{4p^n}{p^n} = 4$, και οι ομάδες τάξεως 4 είναι αβελιανές (αυτό θα το αποδείξουμε παρακάτω). Επίσης, έχουμε δει ότι κάθε ομάδα τάξεως p^2, όπου p πρώτος, είναι αβελιανή, καθώς ως p-ομάδα έχει μη τετριμμένο κέντρο και προκύπτει ότι $|Z(P)| = p^2 = |P|$ και άρα $Z(P) = P$. Έχουμε δηλαδή την επιλύσιμη σειρά $G \rhd P \rhd \{1\}$, με ${G}/{P}$ αβελιανή και ${P}/{\{1\}} \cong P$ που είναι επίσης αβελιανή.
3.) Αν $p = 3$ έχουμε $|G| = 4 \cdot 3^n$, και τότε το πλήθος των 3-υποομάδων του Sylow της G είναι είτε 1 είτε 4. Στην περίπτωση που είναι μοναδική, η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια όπως στο **2.)** και συνεπώς η G είναι επιλύσιμη. Τώρα, αν το πλήθος τους είναι 4, ας υποθέσουμε ότι μια από αυτές είναι η P, επομένως $|P| = 3^n$ και άρα $|G : P| = 4$. Έτσι τα σύμπλοκα της P στην G είναι τα $\{g_1P = P, g_2P, g_3P, g_4P\}$ και υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : G \to S_4$ με $\ker\varphi \lhd G$ και $\ker\varphi \leqslant P$. Τώρα, αν $n = 1$ έχουμε την $|G| = 2^2 \cdot 3$ που είναι της μορφής $|G| = p^2q$ η οποία είναι επιλύσιμη, όπως βρήκαμε παραπάνω. Για $n \geq 2$, έχουμε ${G}/{\ker\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi \leqslant S_4$ και επειδή $\ker\varphi \leqslant P$, τότε $|\ker\varphi| = 3^m$, $m < n$. Οπότε ο πυρήνας είναι 3-ομάδα και άρα είναι επιλύσιμη. Η S_4 είναι επιλύσιμη, οπότε και η ${G}/{\ker\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi \leqslant S_4$ είναι επιλύσιμη, καθώς ξέρουμε ότι υποομάδες επιλύσιμων είναι επιλύσιμες. Συνεπώς, σύμφωνα με πόρισμα, έχουμε $\ker\varphi \lhd G$ επιλύσιμη και ${G}/{\ker\varphi}$ επιλύσιμη, συνεπώς και η G είναι επιλύσιμη.
Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι η G τάξεως $4p^n$, $n \geq 1$, όπου p πρώτος, είναι επιλύσιμη.

> *Οι ομάδες τάξεως 4 είναι αβελιανές.*
>
> Έστω $|G| = 4$. Κάθε στοιχείο g της G θα διαιρεί την τάξη της, οπότε $o(g) \mid 4$ δηλαδή $o(g) = 1, 2$ ή 4. Προφανώς $o(g) = 1 \iff g = 1$. Αν υπάρχει στοιχείο της G τάξης 4, τότε η G είναι κυκλική και άρα αβελιανή. Αν δεν υπάρχει στοιχείο τάξης 4, τότε κάθε μη τετριμμένο στοιχείο έχει τάξη 2, δηλαδή $g^2 = 1 \Rightarrow g = g^{-1}$. Συνεπώς για το $gh \in G$ έχουμε $1 = (gh)^2 = ghgh \Rightarrow hg = g^{-1}h^{-1} = gh$ και η G είναι αβελιανή.