Έστω $|G| = pqr$, όπου p, q, r διαφορετικοί πρώτοι. Τότε η G δεν είναι απλή. Είναι μάλιστα επιλύσιμη.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $p > q > r$. Υποθέτουμε ότι καμία από τις p-υποομάδες, τις q-υποομάδες και τις r-υποομάδες του Sylow δεν είναι μοναδική, άρα κανονική. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Πόσες p-Sylow υποομάδες θα έχουμε; Επειδή $q < p$, $q \not\equiv 1 \mod p$, αλλιώς $p \mid q - 1$. Ομοίως $r \not\equiv 1 \mod p$. Αναγκαστικά θα έχουμε qr p-υποομάδες του Sylow. Επειδή οι κυκλικές με τάξη πρώτο τέμνονται τετριμμένα ή ταυτίζονται, παίρνουμε $qr(p-1) = pqr - qr$ στοιχεία τάξης p.

Πόσες q-υποομάδες του Sylow έχουμε; Επειδή $r \not\equiv 1 \mod q$, θα έχουμε p ή pr q-υποομάδες του Sylow. Άρα τουλάχιστον p το πλήθος. Παίρνουμε έτσι $p(q-1) = pq - p$ στοιχεία τάξης q.

Πόσες r-υποομάδες του Sylow έχουμε; Θα έχουμε p ή q ή pq. Άρα τουλάχιστον q. Παίρνουμε λοιπόν τουλάχιστον $q(r-1) = qr - q$ στοιχεία τάξης r.

Προσθέτοντας το μοναδιαίο η G θα περιέχει τουλάχιστον $pqr - qr + pq - p + qr - q + 1 = pqr + pq - p - q + 1$ στοιχεία της G. Επειδή $|G| = pqr$ θα έχουμε $pqr + pq - p - q + 1 \leq pqr \Leftrightarrow pq - p - q + 1 \leq 0 \Leftrightarrow p(q-1) - (q-1) \leq 0 \Leftrightarrow (p-1)(q-1) \leq 0$, άτοπο γιατί $p > q > 1$.

Συμπέρασμα: Κάποια από τις Sylow υποομάδες είναι μοναδική, άρα κανονική. Όποια και να πάρουμε οι άλλοι δύο ακέραιοι θα είναι ο ένας μικρότερος του άλλου. Έστω ότι η P-υποομάδα του Sylow τάξεως p είναι κανονική. Τότε είναι και αβελιανή, ως κυκλική. Η ${}^{G}\!/_{P}$ περιέχει qr στοιχεία με $q > r$. Επειδή $r \not\equiv 1 \mod q$ υπάρχει μία μόνο υποομάδα της ${}^{G}\!/_{P}$ με q στοιχεία. Αυτή είναι κανονική στην ${}^{G}\!/_{P}$ της μορφής ${}^{Q}\!/_{P}$. Επομένως $q = \left|{}^{Q}\!/_{P}\right| = \frac{|Q|}{p} \Leftrightarrow |Q| = pq$. Επειδή ${}^{Q}\!/_{P} \lhd {}^{G}\!/_{P}$, έπεται ότι $Q \lhd G$ και $\left|{}^{G}\!/_{Q}\right| = \frac{pqr}{pq} = r$. Εχουμε λοιπόν την επιλύσιμη σειρά $G \rhd Q \rhd P \rhd \{1\}$ με ${}^{G}\!/_{Q}$ κυκλική (άρα αβελιανή) τάξης r, ${}^{Q}\!/_{P}$ κυκλική τάξης q και ${}^{P}\!/_{\{1\}} \cong P$ κυκλική τάξης p. ∎

Προσπαθείστε να κάνετε τα ίδια (ως προς την επιλυσιμότητα) για τις ομάδες τάξεως p^2q και τάξεως $4p^n$, $n \geq 1$. (p, q διαφορετικοί πρώτοι).