

Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας II
11 Ιουνίου 2025

Για το «Άριστα» απαιτούνται 10 μονάδες
Θέμα 1 2 μονάδες

Να λυθεί το σύστημα για $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x + ay - 2z &= 1 \\x - 2ay + z &= a \\-2x + ay + z &= 1\end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον επανξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζουμε την μέθοδο απαλοιφής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 1 & -2a & 1 & a \\ -2 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{array}{l} \boxed{2} \\ \boxed{-1} \end{array}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -3a & 3 & a-1 \\ 0 & 3a & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{+}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -3a & 3 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{+}}$$

Αν $a \neq -2$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Αν $a = -2$ τότε το σύστημα γράφεται ως

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 1/6} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\boxed{2}]{\leftarrow +}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Το οποίο οδηγεί στην λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ με } z \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 2

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ επι του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τους παρακάτω υπόχωρους

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(a, a + b, a) \in \mathbb{R}^3\}$$

- (α) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους F, G . **2 μονάδες**
(β) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $F + G$ και $F \cap G$. **3 μονάδες**

Παρατηρούμε ότι ο χώρος F αποτελείται από τις τριάδες

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z \text{ με } y, z \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $(2, 1, 0)^t, (-1, 0, 1)^t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο F και συνεπώς αποτελούν βάση.

Ο χώρος G μπορεί να γραφεί

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ με } a, b \in \mathbb{R}.$$

Τα διανύσματα $(1, 1, 1)^t, (0, 1, 0)^t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο G .

Για να βρούμε την τομή επιχειρηματολογούμε ως εξής: Ψάχνουμε να βρούμε $x, y \in \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mid \cdot 1/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ με } z \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η βάση της τομής προκύπτει για $a = 1, b = 0, y = z = 1$ και δίνεται από το διάνυσμα $(1, 1, 1)^t$.

Τέλος παρατηρούμε ότι η διάσταση της τομής είναι 1 άρα η διάσταση του $F + G$ είναι $\dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3$, άρα μια βάση του αθροίσματος είναι οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{R}^3$ για παράδειγμα η $(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι ο χώρος $F + G$ είναι ο χώρος στηλών του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί με απαλοιφή κατά στήλες και έχει διάσταση 3 όπως φαίνεται στον παρακάτω υπολογισμό

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3 2 μονάδες

Έστω E διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ πεπερασμένης διάστασης. Έστω E_1 υπόχωρος του E . Υπάρχει υπόχωρος E_2 τέτοιος ώστε $E_1 \oplus E_2 = E$;

Η απάντηση είναι ναι. Θεωρούμε μια βάση $\{e_1, \dots, e_r\}$ του διανυσματικού χώρου E_1 την οποία μπορούμε να συμπληρώσουμε σε μια βάση $\{e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_s\}$ του E . Ο χώρος E_2 είναι ο χώρος που παράγεται από τα $w_1, \dots, w_s$.

Θέμα 4 2 μονάδες

Έστω E διανυσματικός χώρος και $f : E \rightarrow E$ γραμμική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι $\ker f \cap \text{Im} f = \{0_E\}$ εάν και μόνο εάν $\ker f = \ker f^2$.

Παρατηρούμε ότι $\ker f \subset \ker f^2$. Πράγματι αν $x \in \ker f = 0$ τότε $f(x) = 0_E$ και συνεπώς $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$.

Έστω $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0_E\}$. Τότε αν $f^2(x) = 0$ ισχύει ότι $y = f(x) \in \operatorname{im} f$ και $f(y) = 0_E$, άρα $y \in \ker f$. Συνεπώς $f(x) = y = 0$, και $x \in \ker f$.

Αντιστρόφως έστω $\ker(f) = \ker f^2$ και $y \in \ker f \cap \operatorname{im} f$. Συνεπώς υπάρχει $x \in E$ με $y = f(x)$, άρα $f^2(x) = 0$ συνεπώς $x \in \ker(f^2) = \ker(f)$ δηλαδή $y = f(x) = 0_E$.

Θέμα 5 2 μονάδες

a) Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ που στέλνει το $f(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ στο $\psi(f) = f''(x) + f'(x) + f(x)$. Να βρεθεί ο πίνακας της ψ ως προς την βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$ του $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

b) Είναι η ψ^{10} 1-1; Είναι η ψ^{10} επί;

Υπολογίζουμε τα

$$\psi(1) = 1$$

$$\psi(x) = x + 1$$

$$\psi(x^2) = x^2 + 2x + 2$$

$$\psi(x^3) = x^3 + 3x^2 + 6x$$

Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $\det \psi = 1$ άρα $\det \psi^{10} = 1$ άρα η ψ^{10} είναι ισομορφισμός.

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα 45 λεπτά