

Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας Ι
3 Σεπτεμβρίου 2025

Θέμα 1 2 μονάδες

Να λυθεί το σύστημα για $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\2x + 3y + 4z &= 5 \\ax + y + az &= 6\end{aligned}$$

Θέμα 2 3 μονάδες

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τους υπόχωρους

$$V_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b - c = 0\}$$

και

$$V_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b = c - a\}$$

- (1) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους V_1, V_2 .
- (2) Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των $V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.
- (3) Υπάρχει υπόχωρος W τέτοιος ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W = V_2 \oplus W$;

Θέμα 3 4 μονάδες

Έστω ο διανυσματικός χώρος των πινάκων $E = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : E \rightarrow E$ που ορίζεται ως εξής:

$$\phi(A) = A - A^t$$

για κάθε $A \in E$.

- (1) Ναδειχθεί ότι η ϕ είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακας $(\phi : B, B)$ της ϕ ως προς τη κανονική βάση $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.
- (2) Να βρεθεί το $\ker(\phi)$ και το $\text{im}(\phi)$.
- (3) Ισχύει $\ker(\phi) \oplus \text{im}(\phi) = E$;

Θέμα 4 2 μονάδες

- (1) Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$ και $f : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση. Εάν H είναι διανυσματικός υπόχωρος του V ναδειχθεί ότι:

$$\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker(f))$$

- (2) Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ και $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ τέτοιοι ώστε

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix};$$

Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα και 45 λεπτά
Για το ((Αριστα)) απαιτούνται 10 μονάδες

Καλή επιτυχία!

Εξετάσεις Γραμμικής Άλγεβρας Ι
3 Σεπτεμβρίου 2025

Για το «Άριστα» απαιτούνται 10 μονάδες
Θέμα 1 2 μονάδες

Να λυθεί το σύστημα για $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\2x + 3y + 4z &= 5 \\ax + y + az &= 6\end{aligned}$$

Σχηματίζουμε τον επανζημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόζουμε την μέθοδο απαλοιφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 3 & 4 & | & 5 \\ a & 1 & a & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\begin{matrix} \boxed{-2} \\ \boxed{+} \end{matrix}}^{-a} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 1-2a & -2a & | & 6-4a \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{1-2a}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2(a-1) & | & 6-4a \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\boxed{+}} \cdot -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2(a-1) & | & 3+2a \end{pmatrix}$$

Αν $a = 1$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Αν $a \neq 1$ τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3+2a}{2(a-1)} \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow -2]{\begin{matrix} \boxed{+} \\ \boxed{-2} \end{matrix}}^{-3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{2a-17}{2(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{a-6}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3+2a}{2(a-1)} \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow -2]{\boxed{+}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7-2a}{2(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{a-6}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3+2a}{2(a-1)} \end{pmatrix}$$

Το οποίο οδηγεί στη λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-2a}{2(a-1)} \\ \frac{a-6}{a-1} \\ \frac{3+2a}{2(a-1)} \end{pmatrix}.$$

Θέμα 2 3 μονάδες

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε τους υπόχωρους

$$V_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b - c = 0\}$$

και

$$V_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b = c - a\}$$

- (1) Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους V_1, V_2 .
- (2) Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των $V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.
- (3) Υπάρχει υπόχωρος W τέτοιος ώστε $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W = V_2 \oplus W$;

Παρατηρούμε ότι $a = 2b + c$ για κάθε $(a, b, c) \in V_1$. Επομένως, τα στοιχεία του V_1 γράφονται ως

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς τα στοιχεία $(2, 1, 0)^t$ και $(1, 0, 1)^t$ παράγουν τον χώρο V_1 και είναι και γραμμικά ανεξάρτητα (για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τον πίνακα που τα έχει ως στήλες αυτός περιέχει ένα ταυτοτικό πίνακα, ή μπορούμε να το δείξουμε με τον ορισμό. Άρα αποτελούν βάση του V_1 .

Παρομοίως, από την εξίσωση που ορίζει τον V_2 έχουμε ότι $a = b + \frac{c}{2}$ για κάθε $(a, b, c) \in V_2$. Επομένως, τα στοιχεία του V_2 γράφονται ως

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς τα στοιχεία $(1, 1, 0)^t$ και $(\frac{1}{2}, 0, 1)^t$ παράγουν τον χώρο V_2 και είναι και γραμμικά ανεξάρτητα όπως και πριν. Άρα αποτελούν βάση του V_2 .

Για να βρούμε την τομή των δύο υποχώρων, θεωρούμε ένα στοιχείο που ανήκει και στους δύο, δηλαδή

$$a = 2b + c \quad \text{και} \quad a = b + c + a,$$

συνεπώς $a = 0$ και $c = -2b$. Επομένως, τα στοιχεία του $V_1 \cap V_2$ γράφονται ως

$$b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και αν χρησιμοποιούσαμε την εξίσωση του V_2 , δηλαδή

$$b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, ο χώρος $V_1 \cap V_2$ έχει διάσταση 1 και βάση το σύνολο $\{(0, 1, -2)^t\}$.

Ο υπολογισμός αυτός μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η διάσταση του αθροίσματος των δύο υποχώρων είναι

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι μια βάση του $V_1 + V_2$ είναι η κανονική $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t\}$.

Αν δεν το παρατηρούσαμε αυτό, θα μπορούσαμε να βρούμε μια βάση του $V_1 + V_2$ από τις βάσεις των δύο υποχώρων. Συγκεκριμένα, το $V_1 + V_2$ είναι ο χώρος που παράγεται από τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τον πίνακα που έχει αυτά τα διανύσματα ως στήλες και εφαρμόζουμε την μέθοδο απαλοιφής κατά στήλες για να βρούμε μια βάση του $V_1 + V_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι πρώτες τρεις στήλες του τελικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως αποτελούν μια βάση του $V_1 + V_2$ που έχει διάσταση 3.

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι και έχουν γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Συνεπώς ο ζητούμενος υπόχωρος W είναι ο χώρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0, 0)^t$.

Παρατηρήστε ότι δεν ισχύει κάποιος «νόμος διαγραφής» για το ευθύ άθροισμα υποχώρων, δηλαδή το γεγονός ότι $V_1 + W = \mathbb{R}^3$ και $V_2 + W = \mathbb{R}^3$ δεν συνεπάγεται ότι $V_1 = V_2$.

Θέμα 3 4 μονάδες

Έστω ο διανυσματικός χώρος των πινάκων $E = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : E \rightarrow E$ που ορίζεται ως εξής:

$$\phi(A) = A - A^t$$

για κάθε $A \in E$.

- (1) Ναδειχθεί ότι η ϕ είναι γραμμική και να βρεθεί ο πίνακας $(\phi : B, B)$ της ϕ ως προς τη κανονική βάση $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.
- (2) Να βρεθεί ο $\ker(\phi)$ και το $\text{im}(\phi)$.
- (3) Ισχύει $\ker(\phi) \oplus \text{im}(\phi) = E$;

Το ότι η ϕ είναι γραμμική προκύπτει από τον ορισμό της. Εναλλακτικά μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει ότι είναι διαφορά δύο γραμμικών συναρτήσεων της ταυτοτικής και της αναστροφής.

Για να βρούμε τον πίνακα της ϕ ως προς την κανονική βάση, υπολογίζουμε τις εικόνες των στοιχείων της βάσης:

$$\begin{aligned} \phi(E_{11}) &= E_{11} - E_{11}^t = 0, \\ \phi(E_{12}) &= E_{12} - E_{12}^t = E_{12} - E_{21} \\ \phi(E_{21}) &= E_{21} - E_{21}^t = E_{21} - E_{12} \\ \phi(E_{22}) &= E_{22} - E_{22}^t = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας της ϕ ως προς την κανονική βάση είναι

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον πυρήνα και την εικόνα της ϕ από τον πίνακα της. Ο πυρήνας προκύπτει από την λύση του ομογενούς συστήματος

$$[\phi]_B x = 0$$

ενώ η εικόνα είναι ο χώρος στηλών, που βλέπουμε ότι παράγεται από το $(0, 1, -1, 0)$ το οποίο στην βάση αντιστοιχεί στο $E_{12} - E_{21}$ και τα πολλαπλάσια του είναι οι αντισυμμετρικοί πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Για τον πυρήνα μπορούμε να λύσουμε το σύστημα με την βοήθεια του επανξιμένου πίνακα. Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πυρήνας είναι ο χώρος των συμμετρικών πινάκων που έχει βάση τους πίνακες $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}$, δηλαδή οι πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Για το τελευταίο ερώτημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ότι κάθε πίνακας γράφεται ως άθροισμα συμμετρικού και αντισυμμετρικού πίνακα. Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο E . Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

Παρατηρήστε ότι ενώ ισχύει πάντα ότι

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\text{im}(\phi)) = \dim(E),$$

δεν ισχύει πάντα ότι

$$E = \ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi),$$

όπως τυχαίνει σε αυτή την άσκηση.

Θέμα 4 2 μονάδες

- (1) Έστω V, W διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$ και $f : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση. Εάν H είναι διανυσματικός υπόχωρος του V ναδειχθεί ότι:

$$\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker(f))$$

- (2) Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ και $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ τέτοιοι ώστε

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix};$$

Για πρώτο ερώτημα θεωρούμε τον περιορισμό της f στον H , δηλαδή την απεικόνιση

$$f|_H : H \rightarrow W, \quad f|_H(h) = f(h), \quad h \in H.$$

Έχουμε ότι

$$\dim(H) = \dim(\ker(f|_H)) + \dim(\operatorname{im}(f|_H)).$$

Είναι σαφές ότι $\operatorname{im}(f|_H) = f(H)$ και ότι $\ker(f|_H) = H \cap \ker(f)$. Επομένως, προκύπτει το ζητούμενο.

Για το δεύτερο ερώτημα, παρατηρούμε ότι ο πίνακας BA είναι αντιστρέψιμος και επομένως $\operatorname{rank}(BA) = 3$. Από την ανισότητα τάξεων για τα γινόμενα πινάκων έχουμε ότι

$$\operatorname{rank}(BA) \leq \min\{\operatorname{rank}(B), \operatorname{rank}(A)\} \leq 2,$$

που είναι άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες.