Οι εικασίες Kakeya

Συμβολισμός: ! Έστω A, B ποσότητες (≥ 0) που πιθανόν εξαρτώνται από πολλές παραμέτρους. Ορίζουμε τα σύμβολα $\gtrsim$, $\lesssim$ και $\sim$ ως εξής:

- $A \gtrsim B \overset{\text{ορ}}{\iff}$ $\exists$ σταθερά $c>0$, που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση, ώστε $A \geq c \cdot B$.

- $A \lesssim B \overset{\text{ορ}}{\iff} B \gtrsim A$.

- $A \sim B \overset{\text{ορ}}{\iff} A \gtrsim B$ και $A \lesssim B$

  (δηλ., αν $\exists$ $c_1, c_2 > 0$, που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση, ώστε $c_1 B \leq A \leq c_2 B$)

οι ποσότητες A, B είναι συγκρίσιμες, modulo πολλαπλασιαστικές σταθερές.

⇝ Πχ:
- $10 \sim 1$, και γενικώς, αν c σταθερά >0, τότε $\boxed{c \sim 1}$.
- Αν $L \in \mathbb{N}$, τότε $\binom{L}{2} = \dfrac{L(L+1)}{2} \sim L^2$, αφού

$$\frac{L^2}{2} \leq \frac{L(L+1)}{2} \leq \frac{L \cdot \cancel{2} L}{\cancel{2}} = L^2 .$$

για συγκρισιμότητα τύπου $\sim$, μετράνε μόνο οι δυνάμεις, όχι οι πολ/στικές σταθερές! Αυτές απλά τις αγνοούμε μέσω του $\sim$.

! Έστω $A(\delta)$, $B(\delta)$ ποσότητες (≥ 0) που είναι συναρτήσεις του $\delta > 0$ (γενικώς θα μάς ενδιαφέρει η σχέση τους καθώς $\delta \to 0$).

Ορίζουμε τα σύμβολα $\gtrapprox$, $\lessapprox$, $\approx$ ως εξής:

- $A(\delta) \gtrapprox B(\delta) \overset{op}{\iff}$ $\exists$ σταθερές $c > 0$ και $c' \in \mathbb{R}$, που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση, ώστε:

$$(*) \quad A(\delta) \geq c \cdot \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{c'}} B(\delta), \quad \forall \delta > 0.$$

⚠ Δε χρειάζεται να έχουμε $c' > 0$. Για $c' > 0$, η $(*)$ μάς λέει ότι, παρότι πιθανόν $A(\delta) \leq B(\delta)$, αν μικρύνουμε το $B(\delta)$ αρκετά, διαιρώντας με κάποια θετική δύναμη του $\log \frac{1}{\delta}$ (πχ με $\log \frac{1}{\delta}$), τότε το $A(\delta)$ υπερτερεί.

Για $c' < 0$, η $(*)$ μάς λέει ότι, όχι απλά $A(\delta) \gtrsim B(\delta)$, αλλά, ακόμη και αν το $B(\delta)$ μεγαλώσει, μετά από πολλαπλασιασμό με (κατάλληλη) θετική δύναμη του $\left(\log \frac{1}{\delta}\right)$, και πάλι το $A(\delta)$ θα είναι πιο μεγάλο.

- $A(\delta) \lessapprox B(\delta) \overset{op}{\iff} B(\delta) \gtrapprox A(\delta)$.

- $A(\delta) \approx B(\delta) \overset{op}{\iff} B(\delta) \lessapprox A(\delta) \lessapprox B(\delta)$.

συγκρίσιμες ποσότητες, modulo λογαριθμικές απώλειες που εξαρτώνται από το δ.

⇝ Π.χ.: • Αν $A(\delta) \gtrsim B(\delta)$, τότε $A(\delta) \gtrapprox B(\delta)$.

• $\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^c \approx 1$

⚠ Η ουσία στους παραπάνω συμβολισμούς είναι ότι με τον πρώτο $(\sim)$ παριστάνουμε ότι οι σταθερές είναι 1, και με τον δεύτερο $(\approx)$ ότι ακόμη και οι πολύ μεγαλύτερες ποσότητες $\log \frac{1}{\delta}$ $(\forall\, \delta > 0)$ είναι 1.

→ **Η διάσταση Minkowski:** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Έστω $\delta > 0$.

Συμβολίζουμε με $N(\delta)$ το πλήθος των δ-κύβων

που χρειαζόμαστε για να καλύψουμε τη δ-περιοχή E^δ του E, δηλαδή το

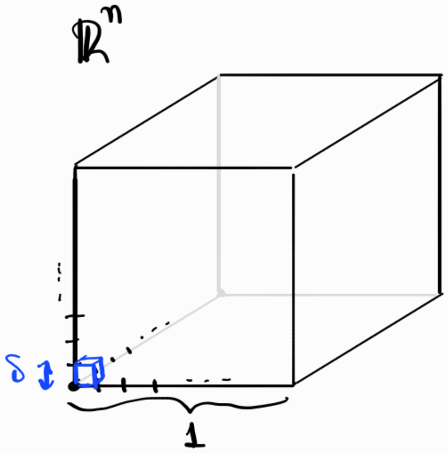
$$E^\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, E) < \delta\}.$$

Η διάσταση Minkowski του E είναι μια έννοια διάστασης που καθορίζεται από το $N(\delta)$ με ένα λογικό τρόπο, δηλαδή ώστε:

- ένας (n-διάστατος) κύβος E στον $\mathbb{R}^n$ να έχει διάσταση n,
- ένα ευθύγραμμο τμήμα E στον $\mathbb{R}^n$ να έχει διάσταση 1,

κοκ.

Συγκεκριμένα:

$\rightsquigarrow$ Έστω $E =$  (n-διάστατος κύβος πλευράς 1).

Τότε, $N(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^n$, όπου η δύναμη n οφείλεται

στο ότι το E έχει μέσα του n γραμμικά ανεξάρτητες

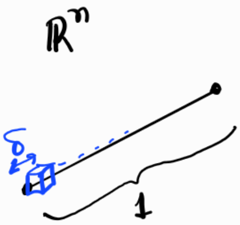
κατευθύνσεις (πλευρές), και κάθε μία πρέπει να κοπεί

σε $\sim \frac{1}{\delta}$ διαστήματα πάχους δ, ώστε τα καρτεσιανά τους

γινόμενα να καλύψουν το E^δ. Άρα:

Η "φυσιολογική" διάσταση που έχει ο κύβος E, δηλαδή το n,

εκφράζεται ως η δύναμη του $\frac{1}{\delta}$ στο $N(\delta)$.

$\rightsquigarrow$ Έστω $E =$  , ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1

στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $N(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^1$, άρα και πάλι η δύναμη

του $\frac{1}{\delta}$ είναι αυτό που εκλαμβάνουμε ως τη φυσιολογική

διάσταση ενός ευθυγράμμου τμήματος.

⇝ Έστω C το σύνολο Cantor (στον $\mathbb{R}$).

Ξέρουμε ότι, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, το C καλύπτεται από 2^n διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ (δηλ. από 2^n $\frac{1}{3^n}$ - κύβους στον $\mathbb{R}$).

Για $\delta = \frac{1}{3^n}$ ($\delta \to 0$ καθώς $n \to +\infty$),

$$2^n = \left(3^{\log_3 2}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3^n}\right)^{\log_3 2}} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\log_3 2},$$

άρα ξανά η δύναμη του $\frac{1}{\delta}$ συμφωνεί αυτό που μέχρι τώρα έχουμε δει ως διάσταση του C (διάσταση Hausdorff).

→ Ορισμός: Έστω E φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως τη διάσταση Minkowski του E, και συμβολίζουμε με $\dim_M E$, την ποσότητα

$$\dim_M E := \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

⚠ Ο παραπάνω ορισμός δίνεται ώστε, αν $N(\delta) \sim \delta^{\alpha}$ $\forall\, \delta > 0$, τότε $\dim_M E = \alpha$.

⚠ Αποδεικνύεται ότι, $\forall$ φραγμένο $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boxed{\dim_H E \leq \dim_M E \leq n}$.

→ Παρατήρηση: Έστω E φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\boxed{N(\delta) \sim \frac{|E^\delta|}{\delta^n}}.$$

→ Πρόταση: Έστω E φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$. Αν $|E^\delta| \gtrsim \delta^{n-\alpha}$, τότε

$$\dim_M E \geq \alpha.$$

Απόδ.: $\exists\, c_n > 0 \;:\; |E^\delta| \geq c_n \cdot \delta^{n-\alpha} \quad \forall \delta > 0.$

Άρα, $N(\delta) \sim \dfrac{|E^\delta|}{\delta^n} \geq c_n \cdot \dfrac{\delta^{\cancel{n}-\alpha}}{\delta^{\cancel{n}}} = c_n \cdot \left(\dfrac{1}{\delta}\right)^\alpha.$

Οπότε:

$$\dim_M E = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log(1/\delta)} \geq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log\left(c_n \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^\alpha\right)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} =$$

$$= \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log c_n + \alpha \cdot \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\limsup_{\delta \to 0} \frac{\log c_n}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}}}_{=0} + \alpha = \alpha.$$

∎

→ **Πρόταση:** Έστω E φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$. Αν $|E^\delta| \gtrsim \delta^{n-\alpha}$, τότε

$$\dim_M E \geq \alpha.$$

Απόδ.: $\exists\, c_n, c_n' > 0$ ώστε: $|E^\delta| \geq c_n \cdot \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{c_n'}} \cdot \delta^{n-\alpha}$

$$\longrightarrow \quad N(\delta) \geq \frac{|E^\delta|}{\delta^n} \geq c_n \cdot \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-c_n'} \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}.$$

Άρα, $\dim_M E = \limsup\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\log N(\delta)}{\log \frac{1}{\delta}} \geq$

$$\geq \limsup_{\delta \to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{\log c_n}{\log \frac{1}{\delta}}}_{\xrightarrow{\delta \to 0}\, 0} - \underbrace{\frac{c_n \cdot \log \log \frac{1}{\delta}}{\log \frac{1}{\delta}}}_{\xrightarrow{\delta \to 0}\, 0} + \underbrace{\frac{\alpha \cancel{\log \frac{1}{\delta}}}{\cancel{\log \frac{1}{\delta}}}}_{=\,\alpha} \Bigg] = \alpha.$$

■

⚠ Με άλλα λόγια, για να δείξουμε ότι κάποιο φραγμένο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει $\dim_M E \geq \alpha$, αρκεί να δείξουμε ότι $|E^\delta| \gtrsim \delta^{n-\alpha}$, $\forall \delta > 0$.

Άρα, η παρακάτω εικασία θα πρέπει να είναι πιο εύκολη από την εικασία Kakeya που έχουμε ήδη διατυπώσει (για τη διάσταση Hausdorff):

! → Εικασία Kakeya (για τη διάσταση Minkowski): Έστω K ένα σύνολο Kakeya στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $\dim_M K = n$.

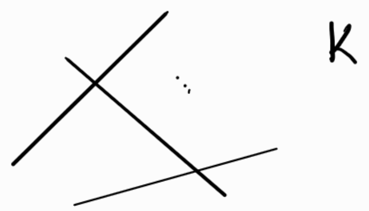
⚠ Όπως και για τη διάσταση Hausdorff, η εικασία αυτή έχει δειχθεί μόνο για $n = 2, 3$.
↳ 2025!

• Με βάση τα παραπάνω, για ΝΔΟ $\dim_M K = n$, αρκεί ΝΔΟ

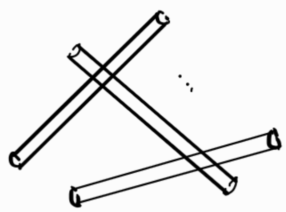
$$\boxed{|K^\delta| \gtrsim 1 \ (= \delta^{n-n}), \quad \forall \delta > 0.}$$

Άρα, ενώ υπάρχουν σύνολα Kakeya με μέτρο 0, πρέπει να δείξουμε ότι <u>κάθε</u> δ-περιοχή τους έχει <u>μεγάλο</u> όγκο.

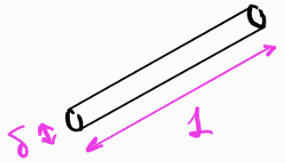
• Για να το επιτύχουμε αυτό, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ότι το K περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε κάθε κατεύθυνση.



Αυτό σημαίνει ότι, $\forall \delta > 0$, το K^δ περιέχει ένα δ-κύλινδρο σε κάθε κατεύθυνση

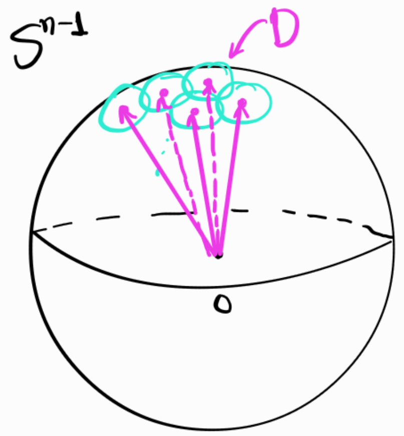


(όπου δ-κύλινδρος είναι κάθε κύλινδρος πάχους δ και μήκους 1 :



)

- Άρα, θεωρώντας D ένα οποιοδήποτε μεγιστικό σύνολο δ-διαχωρισμένων κατευθύνσεων στην S^{n-1} (καλύπτοντας την S^{n-1} με τον ελάχιστο αριθμό από δ-caps, και θεωρώντας τα κέντρα τους), υπάρχει μία οικογένεια $\mathbb{T}$ δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων μέσα στο K^{δ}.

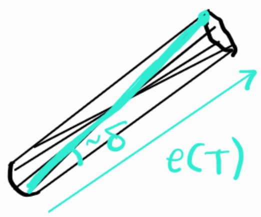


Αφού $\#D \sim \dfrac{\text{επιφανειακό μέτρο } S^{n-1}}{\text{επιφανειακό μέτρο δ-cap}} \sim \dfrac{1}{\delta^{n-1}}$,

προκύπτει ότι το K^{δ} περιέχει μία μεγιστική οικογένεια $\mathbb{T}$ δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων.

και άρα με $\#\mathbb{T} \sim \dfrac{1}{\delta^{n-1}}$.

- Έστω τώρα μία μεγιστική οικογένεια $\mathbb{T}$ δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η $2\cdot \bigcup_{T\in\mathbb{T}} T$ είναι εκ νέου η δ-περιοχή ενός συνόλου Kakeya, καθώς κάθε κύλινδρος της $\mathbb{T}$ περιέχει ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους ~ 1 σε κάθε $e \in S^{n-1}$.



με $|e - \underbrace{e(T)}_{\substack{\text{η κατεύθυνση} \\ \text{του } T}}| \lessapprox \delta$. Άρα, θα πρέπει να ισχύει η εικασία

Kakeya και για την $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} 2 \cdot T$, και άρα ότι

$$\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrapprox 1 \quad \left(\Rightarrow |K^\delta| \gtrapprox 1 \right).$$

Επομένως, αναδιατυπώνουμε την εικασία Kakeya ως εξής:

ισοδύναμη μορφή 2

→ **Εικασία Kakeya (για τη διάσταση Minkowski):** $\forall \, \delta > 0$, κάθε $\mathbb{T}$ $\underbrace{\text{μεγιστική}}_{\#\mathbb{T} \sim \frac{1}{\delta^{n-1}}}$ οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί ότι: $\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrapprox 1$.

→ **Καλύτερη κατανόηση της εικασίας:** Η ποσότητα 1 στο δεξί μέλος της εικασίας Kakeya ικανοποιεί:

$$1 = \delta^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta^{n-1}} \sim \delta^{n-1} \, \#\mathbb{T} \sim \sum_{T \in \mathbb{T}} |T|$$

$\mathbb{T}$ μεγιστική

$|T| \sim \delta^{n-1}$ $\forall$ δ-κύλινδρο T.

Άρα, η εικασία Kakeya λέει ότι, $\forall \, \delta > 0$, $\forall \, \mathbb{T}$ μεγιστική οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων,

$$\boxed{\left| \bigcup_{T \in \mathbb{T}} T \right| \gtrapprox \sum_{T \in \mathbb{T}} |T|}.$$

Παρατηρούμε ότι πάντα ισχύει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\left| \bigcup_{T \in \Pi} T \right| \leq \sum_{T \in \Pi} |T|,$$

με ισότητα $\Longleftrightarrow$ οι κύλινδροι είναι ξένοι ανά δύο.

Επομένως, η εικασία Kakeya λέει πως ισχύει και το αντίστροφο: οι κύλινδροι σε μια μεγιστική οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων συμπεριφέρονται πρακτικά σαν να είναι ξένοι, με την έννοια ότι η ένωσή τους δε διαφέρει πολύ ως προς τον όγκο που θα είχε αν ήταν όντως ξένοι: συγκεκριμένα, αρκεί η "μεγάλη" ποσότητα $\sum_{T \in \Pi} |T|$ να μικρύνει με πολλαπλασιασμό με κάποιο $\dfrac{1}{c_n \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{c_n'}}$, και πέφτει κάτω από την $\left| \bigcup_{T \in \Pi} T \right|$. Αναδιατυπώνουμε για άλλη μια φορά λοιπόν την εικασία Kakeya:

! Εικασία Kakeya (για τη διάσταση Minkowski): $\forall\, \delta > 0$, κάθε

ισοδύναμη μορφή 3

Π $\underbrace{\text{μεγιστική}}_{\#\Pi \sim \frac{1}{\delta^{n-1}}}$ οικογένεια δ-διαχωρισμένων δ-κυλίνδρων στον $\mathbb{R}^n$

πάντα $\leq$ (προφανές)

ικανοποιεί ότι: $\left| \bigcup_{T \in \Pi} T \right| \approx \sum_{T \in \Pi} |T|$

$\gtrsim$: οι κύλινδροι συμπεριφέρονται σα να είναι ξένοι: σπάνια συναντιούνται, κατά μέσο όρο $\lesssim 1$ κύλινδρος περνά από κάθε σημείο.