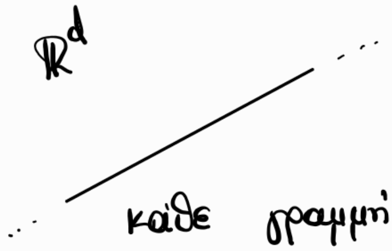
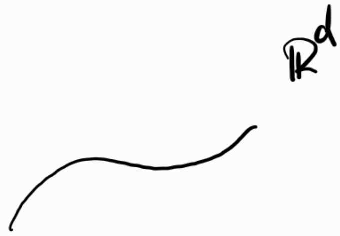
→ Η διάσταση Hausdorff.

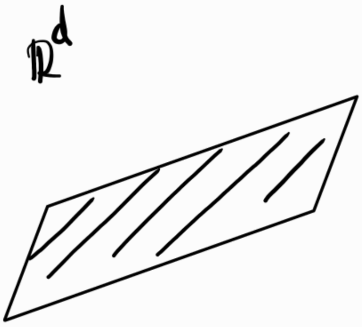
Έστω $d \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να βρούμε μία έννοια διάστασης υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τέτοια ώστε:



κάθε γραμμή και κάθε καμπύλη



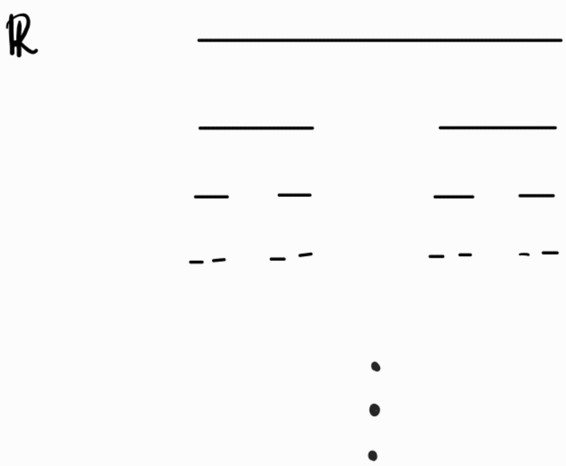
μέσα στον $\mathbb{R}^d$ να έχει διάσταση 1,



κάθε επίπεδο μέσα στον $\mathbb{R}^d$ να έχει διάσταση 2,

κ.ο.κ.,

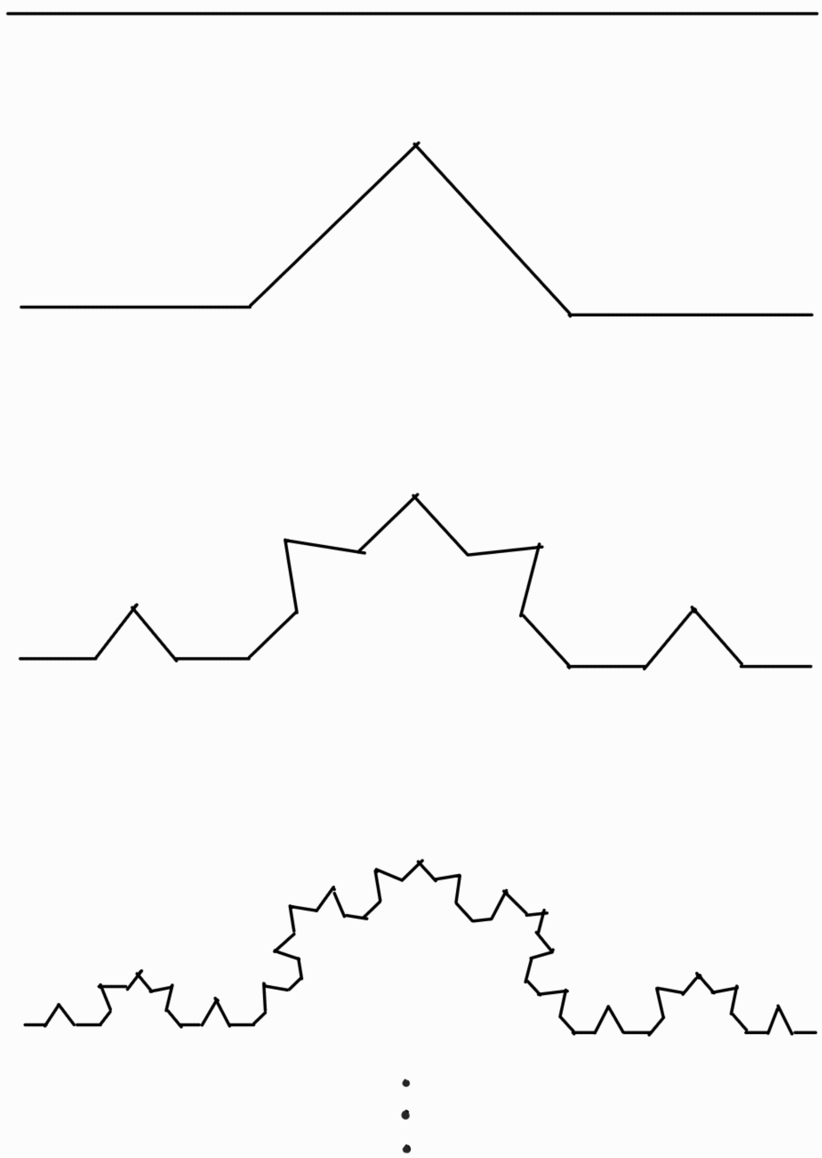
αλλά και που να ορίζεται για τυχαία σύνολα Borel (χωρίς να είναι αναγκαστικά ακέραια διάσταση), π.χ. για το σύνολο Cantor (για $d=1$):



,

και για τη χιονονιφάδα του Koch (για $d=2$):

$\mathbb{R}^2$



Η γενική ιδέα:

Για να <u>μαντέψουμε</u> μια λογική έννοια διάστασης, δουλεύουμε μέσα στον $\mathbb{R}^3$ (δηλ. για $d=3$), με ένα επίπεδο E και μία γραμμή γ (μάλιστα, με την τομή επιπέδου/γραμμής με μια μπάλα, ώστε αυτά να είναι φραγμένα σύνολα).

Νιώθουμε πως <u>το επίπεδο E στον $\mathbb{R}^3$ έχει διάσταση 2.</u>

Πώς το αντιλαμβανόμαστε αυτό; Μέσω του <u>εμβαδού</u>:

$\mathbb{R}^3$

E

- Ο 3-διάστατος όγκος λ_3 του E είναι 0,
- Ο 1-διάστατος όγκος (μήκος) του E είναι $+\infty$,

αλλά:

- Ο 2-διάστατος όγκος (εμβαδόν) του E είναι μια ενδιαφέρουσα θετική, πεπερασμένη ποσότητα.

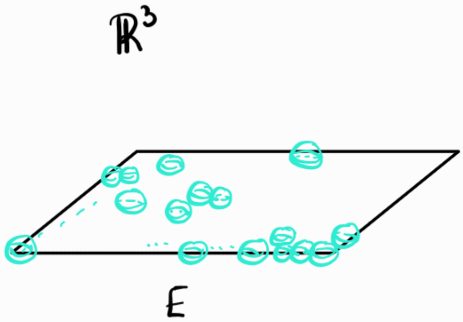
Δηλαδή, από τα τρία είδη όγκων για τα οποία έχουμε κάποια διαίσθηση στον $\mathbb{R}^3$ (μήκος, εμβαδόν, συνήθης όγκος λ_3), το εμβαδόν είναι το πιο "ενδιαφέρον" για το E, γιατί αποκαλύπτει περισσότερη πληροφορία για το E.

Συγκεκριμένα, το ότι το εμβαδόν του E είναι θετικό και πεπερασμένο, σε αντίθεση με τους άλλους όγκους, υποδεικνύει ότι η διάσταση που "ταιριάζει" πιο πολύ στο E είναι η 2.

Και πως "αναδύεται" το 2 με μαθηματικό τρόπο;

Καλύπτουμε το E με πολύ μικρές μπαλίτσες $B(x_i, r_i)$, $i \in \mathbb{N}$, ώστε να το προσεγγίσουμε πολύ καλά.

μπάλες του $\mathbb{R}^3$, δηλ. 3-διάστατες!



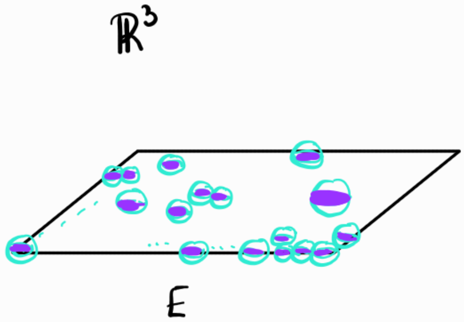
Νιώθουμε ότι:

- 3-διάστατος όγκος (λ_3) του E

$$\simeq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_3(B(x_i,r_i))$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^3, \quad \text{δηλ.}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^3 \text{ "=" } 0.$$

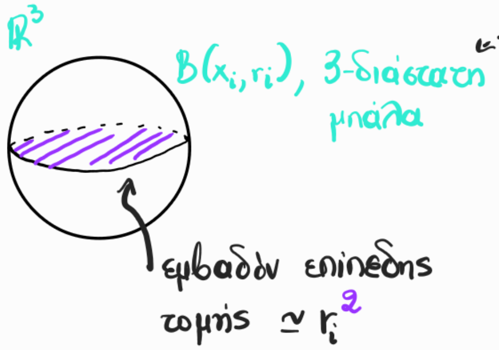


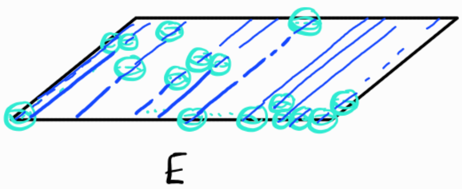
- Εμβ(E) (= ο 2-διάστατος όγκος του E)

$$\simeq \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\text{Εμβ}\left(B(x_i,r_i)\cap E\right)}_{\simeq\, r_i^2}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^2, \quad \text{δηλ.}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^2 \text{ "=" } \text{Εμβ}(E) \in (0,+\infty).$$





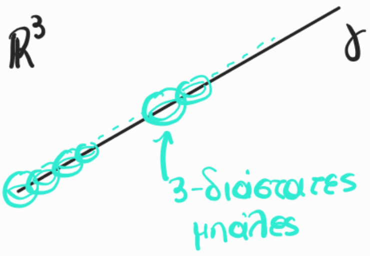
- "μήκος" του E (= ο 1-διάστατος όγκος του E)

$$\simeq \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^1, \quad \text{δηλ.}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^1 \simeq +\infty.$$

Άρα, η διάσταση 2 του E είναι ο εκθέτης s που κάνει την ποσότητα $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s$ "ενδιαφέρουσα", και υποδεικνύει ότι, παρότι καλύπτουμε το E από 3-διάστατες μπάλες, στην ουσία το E προσεγγίζεται καλύτερα από 2-διάστατα αντικείμενα μέσα σε αυτές.

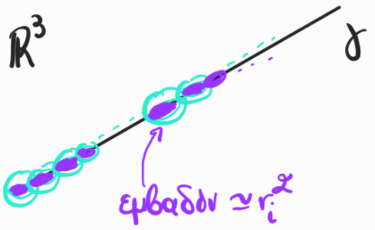
Παρόμοια πράγματα παρατηρούμε στην περίπτωση της γραμμής γ $(\subseteq \mathbb{R}^3)$:



Νιώθουμε ότι η γ θα έχει διάσταση 1, και το 1 "αναδύεται" ως εξής:

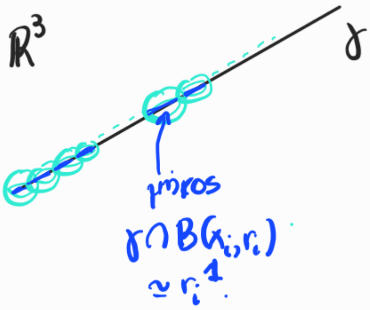
Καλύπτοντας τη γ από πολύ μικρές 3-διάστατες μπαλίτσες $B(x_i, r_i)$, $i \in \mathbb{N}$, νιώθουμε ότι:

- $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^3 \simeq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_3(B(x_i,r_i)) \simeq \lambda_3(\gamma) = 0,$



- $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^2 \simeq$ Εμβ$(\gamma) = 0,$

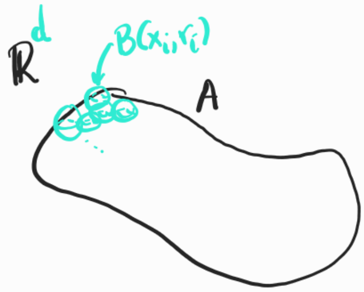
αλλά



- $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^1 \simeq$ μήκος της $\gamma \in (0,+\infty)$.

Δηλαδή, και πάλι η διάσταση 1 της γ είναι ο εκθέτης s που κάνει την ποσότητα $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s$ πιο "ενδιαφέρουσα", και υποδεικνύει ότι έχει νόημα να προσεγγιστεί η γ από μονο-διάστατα αντικείμενα.

→ Γενικώς : Θα δούμε ότι η διάσταση Hausdorff ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ο εκθέτης s_0 για τον οποίο, όταν καλύπτουμε το A από πολύ μικρές d-διάστατες μπαλίτσες $B(x_i, r_i)$, $i \in \mathbb{N}$,



η ποσότητα $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^{s_0}$ μας δίνει "περισσότερη" πληροφορία για τη χωρητικότητα του A από όλες τις ποσότητες $\underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^{s}}_{\text{προσέγγιση του "s-διάστατου όγκου" του } A}$,

και πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^{s} \simeq 0, & \forall s > s_0, \\ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^{s} \simeq +\infty, & \forall s < s_0. \end{cases}$$

Πρακτικά, η διάσταση Hausdorff του A είναι η διάσταση s_0 που <u>θα έπρεπε</u> να έχουν οι μπαλίτσες $B(x_i, r_i)$, αν θα θέλαμε να "ταιριάζουν με ακρίβεια" με το σχήμα του A.

⚠ Η διάσταση Hausdorff του $A \subseteq \mathbb{R}^d$ <u>δε</u> χρειάζεται να είναι ακέραιος αριθμός. Π.χ. θα δούμε ότι η διάσταση Hausdorff του συνόλου Cantor ($\subseteq \mathbb{R}^1$) είναι $\frac{\log 2}{\log 3}$.

→ Η επίσημη ανάλυση:

(Σε ό,τι ακολουθεί, δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική. Η ανάλυση όμως λειτουργεί σε κάθε μετρικό χώρο.)

Υπενθυμίζουμε κάποια προαπαιτούμενα από Θεωρία Μέτρου:

→ Τρόπος κατασκευής εξωτερικών μέτρων και μέτρων:

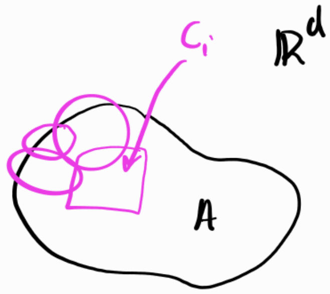
- Έστω $\mathcal{C}$ σ-κάλυψη του $\mathbb{R}^d$ (δηλαδή, $\emptyset \in \mathcal{C}$ και $\exists\, C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{C}$ ώστε $\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i$).

- Ορίζουμε $\tau : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$, με $\tau(\emptyset) = 0$.

- Τότε, το $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$, με

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \tau(C_i) \; : \; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \right\} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^d,$$

είναι εξωτερικό μέτρο.

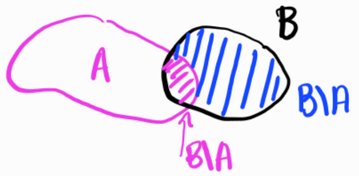


- Το $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ είναι μέτρο, όπου η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρησίμων συνόλων.

(Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται μ^*-μετρήσιμο αν:

$$\forall B \subseteq \mathbb{R}^d, \quad \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

→ το A "κόβει καλά" κάθε $B \subseteq \mathbb{R}^d$.)



→ Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue (λ_d^*) και το μέτρο Lebesgue (λ_d) στον $\mathbb{R}^d$.

Έτσι κατασκευάζονται το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ_d^* και το μέτρο Lebesgue λ_d στον $\mathbb{R}^d$. Συγκεκριμένα, για το λ_d^*, παίρνουμε:

- τη σ-κάλυψη $\mathcal{C} := \left\{ \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k) \ : \ a_k \leq b_k \text{ στον } \mathbb{R}^d \right\}$,

  τα ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^d$

και
- $\tau : \mathcal{C} \longrightarrow [0, +\infty]$, με $\tau(I) := v(I) \ \forall I \in \mathcal{C}$,

  όπου, για κάθε $a_k \leq b_k$ στο $\mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, d$,

  το $I := \prod_{k=1}^{d} (a_k, b_k)$ έχει $v(I) := \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k)$.

Έτσι:

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda_d^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, +\infty]$ ορίζεται ως

$$\lambda_d^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} v(I_i) \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i \ , \ I_i \text{ ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα του } \mathbb{R}^d \right\}.$$

Συμβολίζοντας με $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ τη Lebesgue σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^d$, έχουμε ότι το $\lambda_d := \lambda_d^*{}_{|\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$ είναι μέτρο. Αποκαλούμε το λ_d το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ τη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^d$ (δηλ. τη μικρότερη σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^d$ που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}^d$). Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (και άρα το λ_d είναι επίσης μέτρο αν περιοριστεί στη $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).

Με χρήση του Θεωρήματος Fubini, αποδεικνύεται ότι $\forall$ κέντρο $x \in \mathbb{R}^d$ και κάθε ακτίνα $r \geq 0$,

$$\lambda_d\big(B(x,r)\big) = c_d \cdot r^d,$$

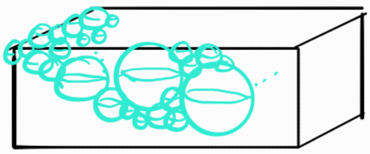
όπου η c_d είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση (συγκεκριμένα, $c_d = \lambda_d\big(B(0,1)\big)$, ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας).

Το λ_d^* και η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ θα παρέμεναν ίδια αν στον ορισμό του λ_d^* καλύπταμε με ανοιχτές μπάλες αντί για ορθογώνια (ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα). Εν τέλει, ισχύει ότι:

$$\lambda_d^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_d\big(\underbrace{B(x_i,r_i)}_{= c_d \cdot r_i^d}\big) \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \underbrace{B(x_i,r_i)}_{\substack{\text{μπάλα στον } \mathbb{R}^d \\ \text{(δηλ. } d\text{-διάστατη)}}} \right\},$$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Ο λόγος είναι ότι, για κάθε ανοιχτό, φραγμένο ορθογώνιο $I \subseteq \mathbb{R}^d$ και για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχουν μπάλες $B(x_i,r_i), i\in\mathbb{N}$, με $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i)$ και $\left| \underbrace{\lambda_d(I)}_{= v(I)} - \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_d(B(x_i,r_i)) \right| < \varepsilon$.



→ Τα εξωτερικά μέτρα Hausdorff.

Το λ_d^* είναι μία καλή προσέγγιση του d-διάστατου όγκου ενός $A\subseteq\mathbb{R}^d$: προσεγγίζουμε το A από d-διάστατες μπαλίτσες, και προσθέτουμε τους (d-διάστατους) όγκους αυτών.

Ο στόχος μας τώρα είναι να δημιουργήσουμε μία έννοια s-διάστατου όγκου στον $\mathbb{R}^d$ (για $s\neq d$), για τυχαίο $A\subseteq\mathbb{R}^d$.

Η λογική θα υπέδεικνυε να καλύψουμε το A από μικρά s-διάστατα αντικείμενα, και να προσθέσουμε τους s-διάστατους όγκους αυτών.

Ποιά s-διάστατα αντικείμενα όμως είναι καλό να χρησιμοποιηθούν; Και τι σημαίνει "s-διάστατο" για $s\notin\mathbb{Z}$;

Για να μην απαντήσουμε και αυτή την ερώτηση, μπορούμε να καλύψουμε και πάλι το A από μικρές μπαλίτσες $B(x_i,r_i)$, $i\in\mathbb{N}$,
↳ d-διάστατες

αλλά για κάθε μία να μετράμε όγκο r_i^s αντί για r_i^d.

(Δηλαδή, είναι σαν να παριστάνουμε ότι η $B(x_i,r_i)$ έχει s διαστάσεις αντί για d.)

Το r_i^s μετράει στην ουσία τον (s-διάστατο) όγκο οποιουδήποτε "s-διάστατου" αντικειμένου ζει μέσα στην $B(x_i,r_i)$.

Το ωραίο είναι ότι όλα αυτά έχουν νόημα και για $s \notin \mathbb{Z}$.

→ <u>Ορισμός / Πρόταση</u>: Έστω $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < +\infty$ και $\delta > 0$.

άνω φράγμα για ακτίνες στην κάλυψη

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$H_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \; : \; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \underbrace{B(x_i,r_i)}_{d\text{-διάστατες}} , \text{ με } r_i \leq \delta \;\; \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Το $H_\delta^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,+\infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο.

<u>Απόδειξη</u>: Το H_δ^s προκύπτει από την προαναφερθείσα μέθοδο κατασκευής εξωτερικών μέτρων, με:

- $\mathcal{C} := \{ B(x,r) : x \in \mathbb{R}^d, \; 0 \leq r \leq \delta \}$,
- $\tau(B(x,r)) = r^s$, $\forall \; B(x,r) \in \mathcal{C}$.

Τονίζουμε ότι αυτή η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{R}^d$, καθώς $\emptyset = B(0,0) \in \mathcal{C}$ και $\mathbb{R}^d = \bigcup_{x \in \frac{\delta}{10\sqrt{d}}\mathbb{Z}^d} B(x,\delta)$.

⚠ $\forall \delta>0$, $\boxed{H^d_\delta = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda^*_d}$ (όπου $c_d = \lambda_d(B(0,1))$.)

Δηλ., το H^d_δ <u>δεν</u> είναι κάτι καινούργιο.

"<u>Απόδ.</u>" : $\forall \delta>0$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$H^d_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^d \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i), \text{ με } r_i \leq \delta \ \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

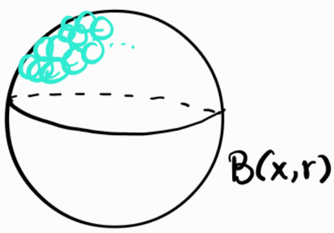
ενώ

$$\lambda^*_d(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda_d(B(x_i,r_i))}_{= c_d r_i^d} \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i) \right\}$$

$$= c_d \cdot \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^d \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i) \right\} \ (*)$$

$$= c_d \cdot H^d_\delta(A),$$

καθώς, παρόλο στην (*) επιτρέπονται και καλύψεις από μπάλες ακτίνας $> \delta$, κάθε τέτοια μπάλα μπορεί στην πράξη να αντικατασταθεί από μπάλες ακτίνας $\leq \delta$. Πράγματι, για κάθε $r>\delta$,



ο (d-διάστατος) όγκος $\lambda_d(B(x,r))$ της τυχαίας "μεγάλης" μπάλας $B(x,r)$ μπορεί να προσεγγιστεί από άθροισμα (d-διάστατων) όγκων μικρών μπαλών (με ακτίνα $<\delta$).

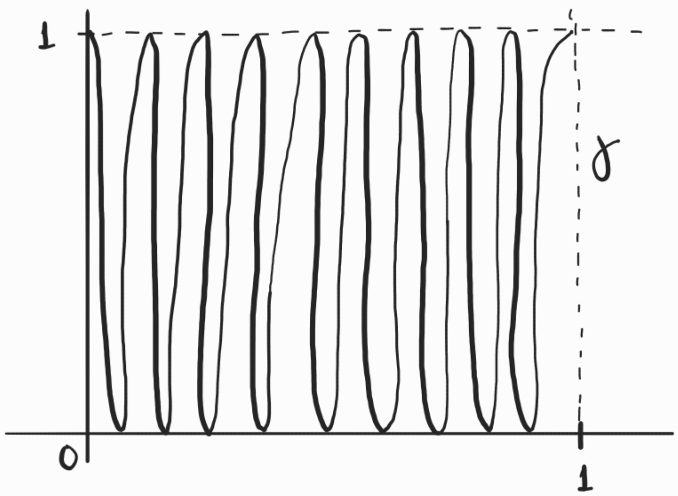
Με άλλα λόγια, αποδεικνύεται ότι, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ κάλυψη $B(x,r) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(x_n, r_n)$, με $r_n \leq \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\left| \lambda_d\left(B(x,r)\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_d\left(B(x_n, r_n)\right) \right| < \varepsilon.$$

■

⚠ Για $s \lneq d$, ο περιορισμός που επιβάλλει το δ στις ακτίνες κάνει <u>ουσιαστική</u> διαφορά στον ορισμό του H^s_δ (και μόνο για <u>μικρά</u> $\delta>0$ το H^s_δ αποτελεί "λογική" προσέγγιση του s-διάστατου όγκου).

Για παράδειγμα, για $d=2$ και $s=1$: Θεωρούμε την εξής καμπύλη $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$:



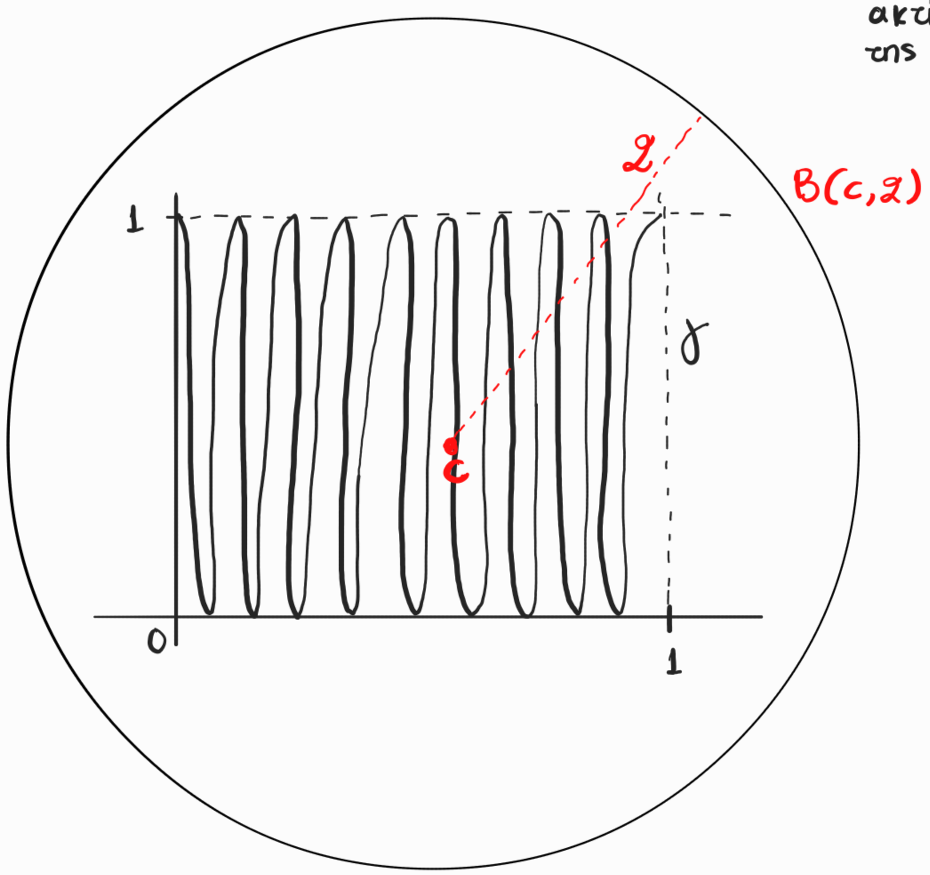
Η γ έχει μεγάλο μήκος.
Και αυτό εκφράζεται από το H^2_δ <u>μόνο</u> για μικρά δ.

Πράγματι :

• Για $\delta = 2$, $\gamma \subseteq B(c,2)$, άρα: $H^1_2(\gamma) \le 2^1 = 2$,

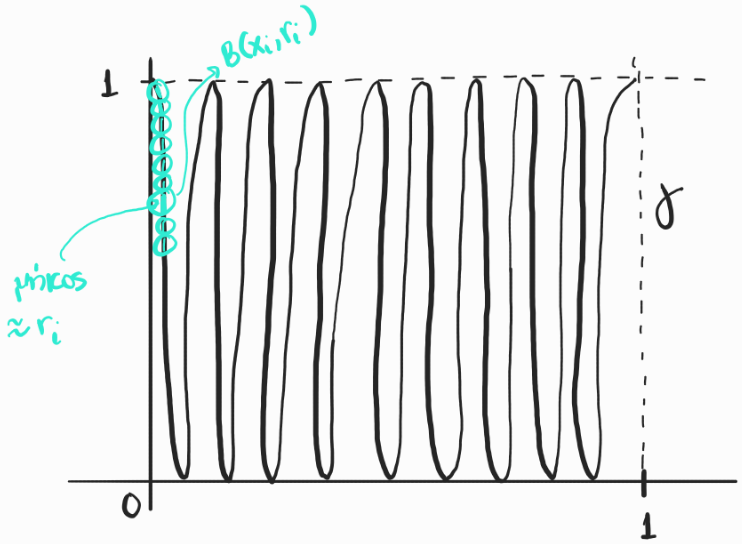
$s=1$

ακτίνα της $B(c,2)$



δηλαδή $H^1_2(\gamma) << $ μήκος της γ.

• Αντίθετα, για δ πολύ μικρό: Καλύπτοντας τη γ με πολύ μικρές μπαλίτσες $B(x_i, r_i)$, ακτίνας $\le \delta$, βλέπουμε ότι το μήκος της $\gamma \cap B(x_i, r_i)$ είναι πρακτικά r_i, $\forall i \in \mathbb{N}$. Άρα,



$$H^1_\delta(\gamma) \approx \sum_{i=1}^{+\infty} r_i \approx \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{μήκος της } \gamma \cap B(x_i, r_i)) \approx \text{μήκος της } \gamma.$$

$\blacksquare$

⚠ Έστω $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < +\infty$ και $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Παρατηρούμε ότι, καθώς το $\delta \downarrow 0$, το $H^s_\delta(A) \nearrow$.

Πράγματι,

$$H^s_\delta(A) = \inf \overbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \ : \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i), \text{ με } r_i \leq \delta \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}}^{V_\delta}.$$

Καθώς το $\delta \downarrow 0$, επιτρέπονται όλο και λιγότερες μπάλες στις παραπάνω καλύψεις του A. Άρα, οι επιτρεπόμενες καλύψεις του A λιγοστεύουν, άρα το παραπάνω σύνολο V_δ μικραίνει, άρα το $\inf V_\delta$ μεγαλώνει. ∎

→ **Ορισμός / Πρόταση:** Έστω $d \in \mathbb{N}$ και $0 \leq s < +\infty$.

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$H^s(A) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A)$$

$$\left(= \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A) \right).$$

Καλός ορισμός, από προηγούμενη παρατήρηση.

Το d αποκρύπτεται, αλλά πάντα καλύπτουμε με d-διάστατες μπάλες.

Το $H^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, +\infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο, και ονομάζεται το s-διάστατο εξωτερικό μέτρο Hausdorff.

Απόδ.: • $H^s(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{H^s_\delta(\emptyset)}_{=0, \text{ αφού } H^s_\delta \text{ εξωτ. μέτρο}} = 0.$

• $\forall A \subseteq B$ στον $\mathbb{R}^d$, $H^s_\delta(A) \le H^s_\delta(B)$ $\forall \delta > 0$,

H^s_δ εξωτ. μέτρο

άρα : $\underbrace{\lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A)}_{= H^s(A)} \le \underbrace{\lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(B)}_{= H^s(B)}$, δηλαδή

$H^s(A) \le H^s(B)$.

• $\forall A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\forall \delta > 0: \; H^s_\delta\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} H^s_\delta(A_n) \le \sum_{n=1}^{+\infty} H^s(A_n)$$

H^s_δ εξωτ. μέτρο

$H^s(A_n) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\delta \to 0} H^s_\delta\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}_{= H^s\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} H^s(A_n).$$

■

Αναφέρουμε (προς το παρόν χωρίς απόδειξη) ότι κάθε H^s είναι μέτρο πάνω στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^d$ (δηλαδή, τα σύνολα Borel είναι H^s-μετρήσιμα).

→ Παρατήρηση 1: Για $s = d$: $H^d = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*$, όπου $c_d = \lambda_d(B(0,1))$.

Αποδ: $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, $H^d(A) = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{H_\delta^d(A)}_{= \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*(A)} = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*(A)$. $\blacksquare$

→ Παρατήρηση 2: Για $s = 0$: Το H^0 είναι το μέτρο απαρίθμησης στον $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, $H^0(A) = \# A$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$.