→ **Παρατήρηση 1:** Για $s=d$: $H^d = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*$, όπου $c_d = \lambda_d(B(0,1))$.

Αποδ: $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^d$, $H^d(A) = \lim\limits_{\delta \to 0} \underbrace{H_\delta^d(A)}_{= \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*(A)} = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*(A)$. ∎

→ **Παρατήρηση 2:** Για $s=0$: Το H^0 είναι το μέτρο απαρίθμησης στον $\mathbb{R}^d$. Δηλαδή, $H^0(A) = \#A$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Αποδ.: Αρκεί να δείξουμε ότι $H^0(A) = \#A$ για κάθε πεπερασμένο $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

(Πράγματι, τότε προκύπτει και ότι $H^0(A) = \#A \; (=+\infty)$ για κάθε άπειρο $A \subseteq \mathbb{R}^d$, καθώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το A περιέχει κάποιο σύνολο A_n με n στοιχεία, και άρα

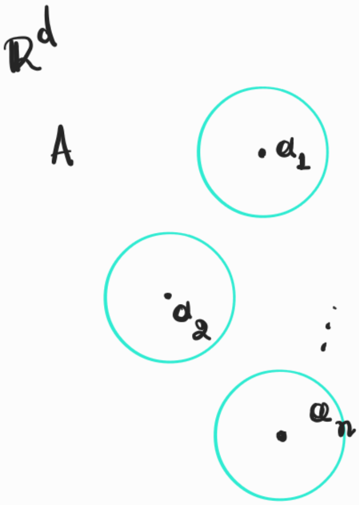
$$H^0(A) \underset{\substack{A \supseteq A_n \\ \text{και } H^0 \text{ εξωτ. μέτρο}}}{\geq} H^0(A_n) = \#A_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

οπότε $H^0(A) = +\infty$).

Έστω λοιπόν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ πεπερασμένο. Γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, όπου $n = \#A$. ΘΔΟ:

$$\boxed{H_\delta^0(A) = \#A, \text{ για κάθε μικρό } \delta > 0.} \quad (*)$$

• $H^0_\delta(A) \le \#A$, $\forall \delta>0$:



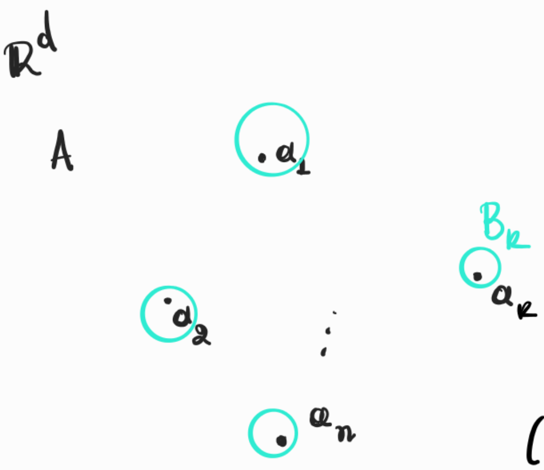
$$\forall \delta>0,\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{B(a_i,\delta)}_{\text{ακτίνα } \le \delta}$$

$$\Longrightarrow H^0_\delta(A) \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta^0}_{=1} = n = \#A.$$

• $H^0_\delta(A) \ge \#A$, $\forall$ μικρό $\delta>0$:

Έστω $\delta_0 := \frac{1}{10}\cdot \underbrace{\min\{|a_i-a_j| : i\neq j \text{ στο } \{1,\dots,n\}\}}_{\text{η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων του } A}$.

Έστω $\delta \le \delta_0$. ΘΔΟ: $\boxed{H^0_\delta \ge \#A}$:



Έστω η τυχαία κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r_i)$ του A από ανοιχτές μπάλες με ακτίνες $r_i \le \delta\ (\le \delta_0)$, $\forall i\in\mathbb{N}$. ($m\in\mathbb{N}$ ή $m=+\infty$. Εδώ έχει πολλή αξία ότι, ίσως, $m\in\mathbb{N}$, γι'αυτό και το τονίζουμε).

$\forall\ k = 1, \dots, n,$ υπάρχει μπάλα B_k ανάμεσα στις $B(x_i, r_i)$ που να περιέχει το a_k.

Μάλιστα, $a_k \neq a_j \longrightarrow B_k \neq B_j$, δηλαδή είναι <u>αδύνατον</u> δύο διαφορετικά στοιχεία του A να ανήκουν στην ίδια μπάλα $B(x_i, r_i)$ (καθώς τότε $|a_k - a_j| < 2r_i \leq 2\delta \leq 2\delta_0$, άτοπο).

(Εύκολα μάλιστα αποδεικνύεται ότι $B_k \cap B_j = \emptyset$, $\forall\ k \neq j$ στο $\{1, \dots, n\}$, αλλά δε μας χρειάζεται.)

Άρα: οι μπάλες B_k, $k = 1, \dots, n$, είναι διαφορετικά ανά δύο στοιχεία της κάλυψης $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in \{1, 2, \dots, m\}}$ του A, και άρα $n = \# A$ ως προς το πλήθος.

Επομένως, για αυτή την τυχαία κάλυψη του A and μπάλες με ακτίνες $r_i \leq \delta$, έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^0 \geq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[\text{ακτίνα της } (B_k)]^0}_{=1} = n = \# A.$$

Παίρνοντας infimum πάνω σε όλες αυτές τις καλύψεις, προκύπτει ότι $H^0_\delta(A) \geqslant \#A$.

Επομένως: $$H^0_\delta(A) = \#A, \quad \forall \delta \leqslant \delta_0$$

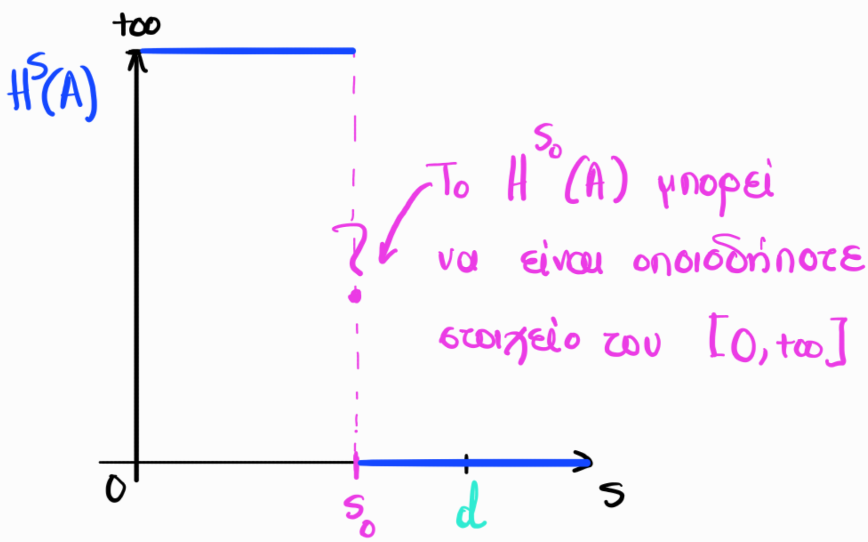
$$\Longrightarrow H^0(A) \left(= \lim_{\delta \to 0} H^0_\delta(A) \right) = \#A.$$ ∎

→ Η διάσταση Hausdorff

→ Ορισμός / Πρόταση: Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$, υπάρχει (μοναδικό) $s_0 \in [0, d]$, ώστε:

$$\begin{cases} H^s(A) = 0, & \forall s \gneqq s_0, \\ H^s(A) = +\infty, & \forall\, 0 \leq s \lneqq s_0 \end{cases}.$$

Αυτό το s_0 αποκαλείται η διάσταση Hausdorff του A και συμβολίζεται με $\dim_H A$.



⚠ Με άλλα λόγια:

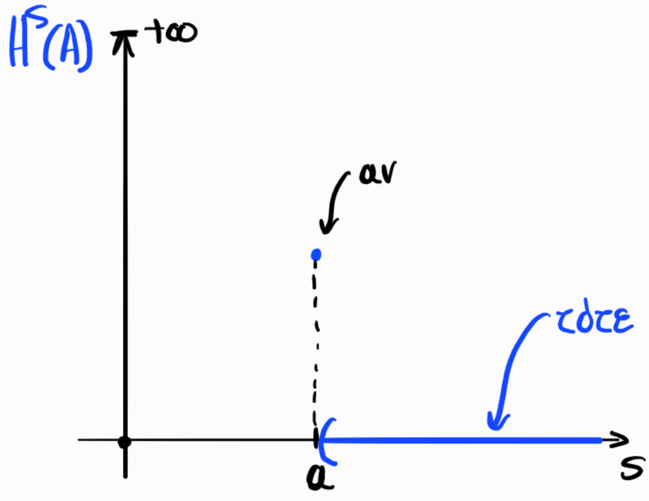
$$\dim_H A = \inf\{ s \geqslant 0 : H^s(A) = 0 \}.$$

Αποδ.: Δείχνουμε τον ισχυρισμό σε 2 βήματα:

1. Αν για κάποιο $a \in [0,+\infty)$ έχουμε ότι $H^a(A) < +\infty$,

τότε: $H^s(A) = 0, \ \forall s > a$. Δηλαδή, ισχύει το

παρακάτω:



Πράγματι, έστω $s > a$ και $\delta > 0$.

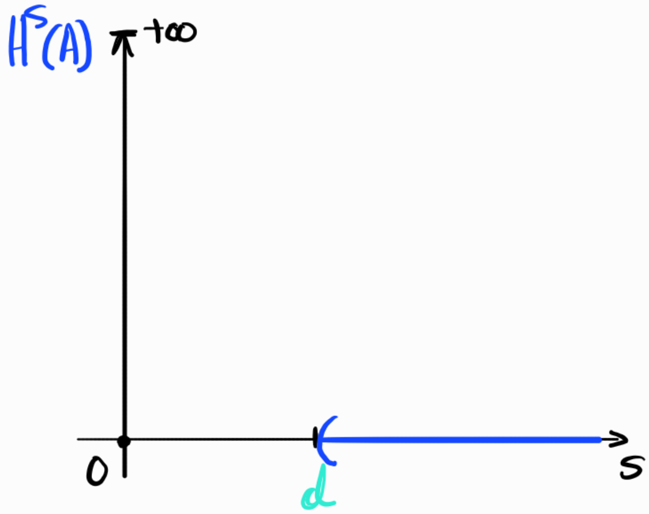
$$H^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \underbrace{r_i^s}_{\substack{\| \\ r_i^a \cdot r_i^{s-a} \le r_i^a \cdot \delta^{s-a}}} : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i), \text{ με } r_i \le \delta \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

(αφού $s - a > 0$, $r_i \le \delta$)

$$\le \delta^{s-a} \cdot \inf\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^a : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i), \text{ με } r_i \le \delta \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \delta^{s-a} \cdot \underbrace{H^a_\delta(A)}_{\substack{\le \\ H^a(A)}} \le \delta^{\overset{>0}{s-a}} \cdot \underbrace{H^a(A)}_{<+\infty} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0.$$

(2) $\forall s > d$, έχουμε: $H^s(A) = 0$. Δηλαδή:



Πράγματι, χρησιμοποιούμε ότι ειδικά $H^d(A) = \frac{1}{c_d} \cdot \lambda_d^*(A)$

(όπου $c_d \in (0, +\infty)$). Επομένως:

- Αν το A είναι <u>φραγμένο</u>, τότε $\lambda_d^*(A) < +\infty$

  $\Longrightarrow H^d(A) < +\infty$

  $\overset{(1)}{\Longrightarrow} H^s(A) = 0 \quad \forall s > d$.

- Αν το A είναι άφραχτο, τότε, αφού $A = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{\left(A \cap B(x,10)\right)}_{\text{φραγμένο}}$,

  $\forall s > d$ έχουμε:

$$0 \le H^s(A) \underset{\substack{H^s \text{ εξωτ.} \\ \text{μέτρο}}}{\le} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{H^s\left(A \cap B(x,10)\right)}_{=0} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} 0 = 0,$$

άρα $H^s(A) = 0$.

Το ζητούμενο προκύπτει από τα 1 και 2 :

- Από το 2, το

$$s_0 := \inf \underbrace{\{ s \in [0,+\infty) : H^s(A) = 0 \}}_{=: B}$$

ανήκει στο $[0, d]$ (πράγματι, $s_0 \leq d$ επειδή 2 $\Rightarrow$ $(d, +\infty) \subseteq B$, άρα $\inf B \leq d$).

- $H^s(A) = +\infty \quad \forall\, s \in \underbrace{[0, s_0)}_{\text{αν } \neq \emptyset, \text{ φυσικά}}$, καθώς,

αν για κάποιο $0 \leq s < s_0$ είχαμε ότι $H^s(A) < +\infty$,

τότε 1 $\Rightarrow$ $H^a(A) = 0 \ \forall\, a > s$, δηλ. $(s, +\infty) \subseteq B$,

άρα $s_0 = \inf B \leq s$, άτοπο.

- $H^s(A) = 0 \quad \forall\, s > s_0$. Πράγματι, $s_0 < \frac{s+s_0}{2} < s$

Αφού $\frac{s+s_0}{2} > s_0$, από τον ορισμό του s_0 έχουμε

ότι $H^{\frac{s+s_0}{2}}(A) = 0 < +\infty \xRightarrow[\frac{s+s_0}{2} < s]{1} H^s(A) = 0.$ ∎

→ Παρατηρήσεις:

① Η διάσταση Hausdorff ενός $A \subseteq \mathbb{R}^d$ δεν μπορεί να ξεπεράσει τη διάσταση d του ευρύτερου χώρου $\mathbb{R}^d$ (όπως και περιμένει κανείς από οποιαδήποτε λογική έννοια διάστασης).

② Αν ένα Lebesgue-μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει $\boxed{\lambda_d(A) > 0}$, τότε αυτόματα $\boxed{\dim_H A = d}$. (Παρόμοια αν $\lambda_d^*(A) < +\infty$, για κάποιο $A \subseteq \mathbb{R}^d$.)

Επομένως, τα σύνολα για τα οποία έχει ενδιαφέρον να βρούμε τη διάσταση Hausdorff είναι αυτά για τα οποία $\lambda_d(A) = 0$. (Και για αυτά, η $\dim_H A$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός στο $[0, d]$.)

③ Αν για κάποιο $s_0 \in [0, +\infty)$ έχουμε $0 < H^{s_0}(A) < +\infty$, τότε αυτόματα $\dim_H A = s_0$.

→ **Άσκηση:** Κάθε πεπερασμένο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει $\dim_H A = 0$.

Λύση: $H^0(A) = \# A \in (0,+\infty)$, άρα $\dim_H A = 0$. ∎

→ **Άσκηση:** Βρείτε τη διάσταση Hausdorff των συνόλων

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad(\subseteq \mathbb{R})$.

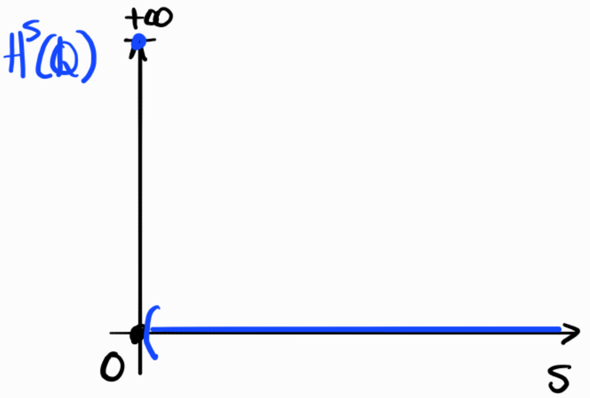
Άρα, $\dim_H \mathbb{Q}$, $\dim_H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \le 1$

Λύση: Εδώ $d = 1$.

- $\lambda_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = +\infty > 0$, άρα $\boxed{\dim_H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 1.}$

  όσο μεγαλύτερη γίνεται.

- $\boxed{\dim_H \mathbb{Q} = 0}$: Αρκεί ΝΔΟ, $\forall s>0$, $H^s(\mathbb{Q}) = 0$.



Έστω λοιπόν $s > 0$.

Έστω $\delta \in (0,1)$.

Αφού $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^1$, για τον υπολογισμό του $H^s_\delta(\mathbb{Q})$

καλύπτουμε το $\mathbb{Q}$ από ανοιχτά διαστήματα, ακτίνας $\le \delta$.

Για να οδηγηθούμε σε μικρό $H^s_\delta(\mathbb{Q})$, θέλουμε το άθροισμα των $(\text{ακτίνων})^s$ να βγαίνει μικρό.

Αυτό επιτυγχάνεται π.χ. ως εξής:

Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$, και άρα

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(q_n - \delta^n, q_n + \delta^n)}_{\substack{\text{ανοιχτή μπάλα} \\ \text{στον } \mathbb{R}^1, \text{ ακτίνας } \leq \delta}} . \quad \text{Επομένως:}$$

$$(0 \leq) H^s_\delta(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\delta^n)^s = \sum_{n=1}^{+\infty} (\delta^s)^n \underset{\substack{\text{αφού } \delta \in (0,1), \\ s>0.}}{\overset{\delta^s \in (0,1),}{=\!=}} \frac{\delta^s}{1-\delta^s} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{0^s}{1-0^s} = 0.$$

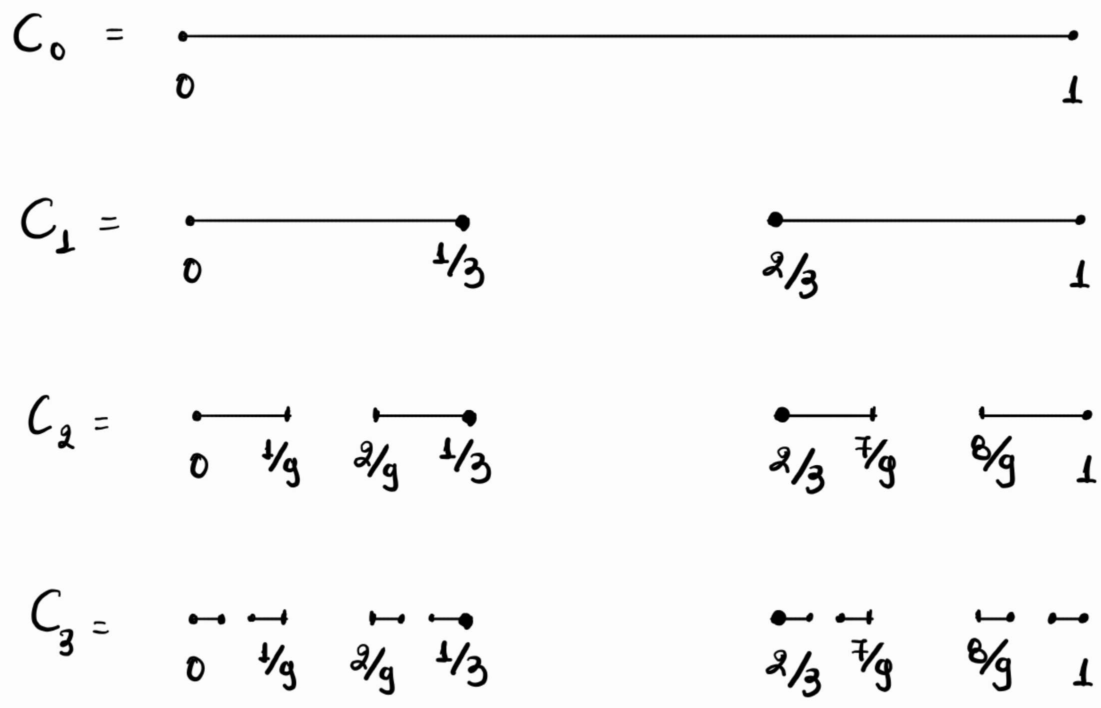
Άρα, $\lim\limits_{\delta \to 0} H^s_\delta(\mathbb{Q}) = 0$, δηλ. $H^s(\mathbb{Q}) = 0$ (για το τυχαίο $s>0$).

Άρα, $\dim_H \mathbb{Q} = 0$.

$\blacksquare$

→ Παράδειγμα: Το σύνολο Cantor C έχει $\boxed{\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}}$.

Απόδ.: Το σύνολο Cantor C κατασκευάζεται επαγωγικά ως εξής: Ξεκινάμε με το $C_0 := [0,1]$ στο στάδιο 1, και σε κάθε επόμενο στάδιο αφαιρούμε τα μεσαία ανοιχτά "τρίτα" των κλειστών διαστημάτων του τελευταίου σταδίου, για να πάρουμε ένα καινούργιο κλειστό σύνολο C_n :



⋮

Έτσι, $C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$, και κάθε C_n είναι ένωση 2^n <u>κλειστών</u> διαστημάτων $J_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$, μήκους $\frac{1}{3^n}$ το κάθε ένα. <u>Παρατηρούμε</u> τα εξής:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $C \subseteq C_n$. Επίσης, κάθε $J_i^{(n)}$ περιέχεται σε κάποιο ανοιχτό διάστημα $\tilde{J}_i^{(n)}$, ακτίνας $< \frac{1}{3^n}$. Άρα:

(*1)
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad C \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^n} \underbrace{\tilde{J}_i^{(n)}}_{\substack{\text{ανοιχτές μπάλες} \\ \text{του } \mathbb{R}, \text{ ακτίνας } < \frac{1}{3^n}}}}$$

• Έστω $s := \frac{\log 2}{\log 3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{i=1}^{2^n} \ell(\mathcal{J}_i^{(n)})^s = 1}$ $(*_2)$:

μήκος

$$\sum_{i=1}^{2^n} \ell(\mathcal{J}_i^{(n)})^s = 2^n \cdot \frac{1}{(3^n)^s} = 2^n \cdot \frac{1}{(3^n)^{\frac{\log 2}{\log 3}}} \overset{\frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2}{=\!=} $$

$$= 2^n \cdot \frac{1}{3^{n \log_3 2}} = 2^n \cdot \frac{1}{\left(3^{\log_3 2}\right)^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1.$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι για την απόδειξη:

• $\boxed{\dim_H C \leq \frac{\log 2}{\log 3}}$: Αρκεί Ν.Δ.Ο., για $s := \frac{\log 2}{\log 3}$,

$$H^s(C) < +\infty.$$

Και πράγματι, έστω $\delta > 0$. $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$, $\frac{1}{3^n} < \delta$.

Άρα, $(*_1) \Longrightarrow \forall n \geq n_0$,

$$H_\delta^s(C) \leq \sum_{i=1}^{2^n} r(\tilde{\mathcal{J}}_i^{(n)})^s \leq \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \sum_{i=1}^{2^n} \ell(\mathcal{J}_i^{(n)}) \overset{(*_2)}{=\!=} 1.$$

ακτίνα

Αφού αυτό ισχύει $\forall\, \delta>0$, παίρνουμε:

$$H^s(C) \left(= \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(C)\right) \leq 1 < +\infty .$$

Άρα, $\dim_H C \leq s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

• $\boxed{\dim_H C \geq \dfrac{\log 2}{\log 3}}$: Αρκεί ΝΔΟ, για $s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$, $H^s(C) > 0$.

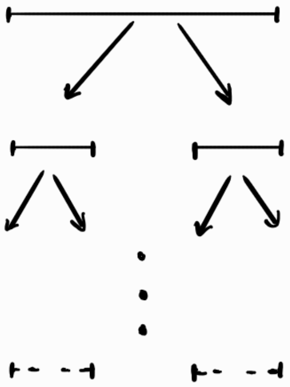
Συγκεκριμένα, ΘΔΟ $H^s(C) \geq \dfrac{1}{2^{s+2}}$:

Αυτό είναι το πιο δύσκολο κομμάτι της απόδειξης, και χρησιμοποιεί ότι, όσο "ζουμάρουμε" στο C, συνεχίζουμε να βλέπουμε πρακτικά την ίδια εικόνα.

Συγκεκριμένα, θα χρειαστούμε την εξής γενίκευση της $(*_2)$:

Έστω $k<n$ στο $\mathbb{N}$. Θεωρούμε το τυχαίο διάστημα $J^{(k)}_\lambda$ του σταδίου k (μήκος $\dfrac{1}{3^k}$). Στα επόμενα στάδια, το $J^{(k)}_\lambda$ αλλάζει ως εξής:

$J^{(k)}_\lambda =$



: στάδιο k

: στάδιο $k+1$ $\rightsquigarrow$ 2 διαστήματα

: στάδιο n $\rightsquigarrow$ 2^{n-k} διαστήματα

Άρα, το $J_\lambda^{(k)}$ περιέχει 2^{n-k} διαστήματα του σταδίου n (δηλ. 2^{n-k} διαστήματα της μορφής $J_i^{(n)}$).

Επομένως,

$$\boxed{\sum_{i:\, J_i^{(n)} \subseteq J_\lambda^{(k)}} \ell(J_i^{(n)})^s = \ell(J_\lambda^{(k)})^s} \quad : \quad (*_3)$$

$$\sum_{i:\, J_i^{(n)} \subseteq J_\lambda^{(k)}} \ell(J_i^{(n)})^s = 2^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = 2^{n-k} \cdot \frac{1}{3^{n \cdot \log_3 2}} =$$

$$= 2^{n-k} \cdot \frac{1}{(3^{\log_3 2})^n} = 2^{n-k} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{(3^k)^{\log_3 2}} = \ell(J_\lambda^{(k)})^s .$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε ότι $H^s(C) \geq \frac{1}{2^{s+2}}$:

Έστω $\delta > 0$. ΘΔΟ $H^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2^{s+2}}$:

Έστω $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (x_i - r_i, x_i + r_i)$, με $r_i \leq \delta$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

ΘΔΟ: $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \geq \frac{1}{2^{s+2}}$:

Το C είναι συμπαγές, άρα $\exists\, M \in \mathbb{N}$:

$$C \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{M} (x_i - r_i, x_i + r_i)}_{=: \, \mathcal{U} \text{ , ανοιχτό}} .$$

Τότε:

① Το $\underset{\substack{\text{συμπ.} \\ \subseteq \\ [0,1]}}{C} \subseteq \underset{\text{ανοιχτό}}{\mathcal{U}}$, άρα $\rho := \text{dist}\,(C, \mathcal{U}^c \cap [0,1]) \gneq 0$.

ξένα συμπαγή

Για μεγάλο n_0, $\frac{1}{3^{n_0}} \lneq \rho$, άρα το C_{n_0} , το οποίο

ζει στην $\frac{1}{3^{n_0}}$ - περιοχή του C , <u>δεν</u> τέμνει το

$\mathcal{U}^c \cap [0,1]$, και άρα

$$(C_n \subseteq)\; C_{n_0} \subseteq \mathcal{U} \quad , \quad \forall\, n \geq n_0 .$$

② Το $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{M} (x - r_i, x + r_i)$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του

συμπαγούς C_{n_0}. Άρα, υπάρχει $\vartheta > 0$ ώστε :

κάθε υποσύνολο του C_{n_0} , διαμέτρου $\leq \vartheta$, να

περιέχεται πλήρως σε κάποιο από τα $(x - r_i, x + r_i)$,

$i \in \{1, \dots, M\}$ (Lebesgue covering lemma).

$(\longrightarrow \vartheta \leq 2\delta)$.

Επομένως, επιλέγοντας n τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{3^n} \leq \theta$,

προκύπτει ότι τα $J_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, 2^n$, δηλ. τα διαστήματα του n-οστού σταδίου, περιέχονται το καθένα σε κάποιο από τα $(x_i - r_i, x_i + r_i)$, $i = 1, \dots, M$.

Χρησιμοποιώντας την $*_3$, θα δείξουμε ότι :

$\forall i = 1, \dots, M$,

$$\boxed{4 \cdot \ell\big((x_i - r_i, x_i + r_i)\big)^s \geq \sum_{j:\, J_j^{(n)} \subseteq (x_i - r_i, x_i + r_i)} \ell\big(J_j^{(n)}\big)^s} \quad *$$

Με την $*$, η απόδειξη ότι $H_\delta^s(C) \geq \frac{1}{4}$ λήγει ως εξής:

Για αυτή την τυχαία κάλυψη $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} (x_i - r_i, x_i + r_i)$, με $r_i \leq \delta$ $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \geq \sum_{i=1}^{M} r_i^s = \frac{1}{2^s} \cdot \sum_{i=1}^{M} \ell\big((x_i - r_i, x_i + r_i)\big)^s$$

$$\overset{*}{\geq} \frac{1}{2^s} \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{4} \cdot \sum_{j:\, J_j^{(n)} \subseteq (x_i - r_i, x_i + r_i)} \ell\big(J_j^{(n)}\big)^s$$

$\forall j=1,\dots,2^n$, το $J_j^{(n)} \subseteq$ σε κάποιο (x_i-r_i, x_i+r_i), $i=1,\dots,M$

$$\geq \frac{1}{2^s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{2^n} \ell\left(J_j^{(n)}\right)^s}_{= 1}$$

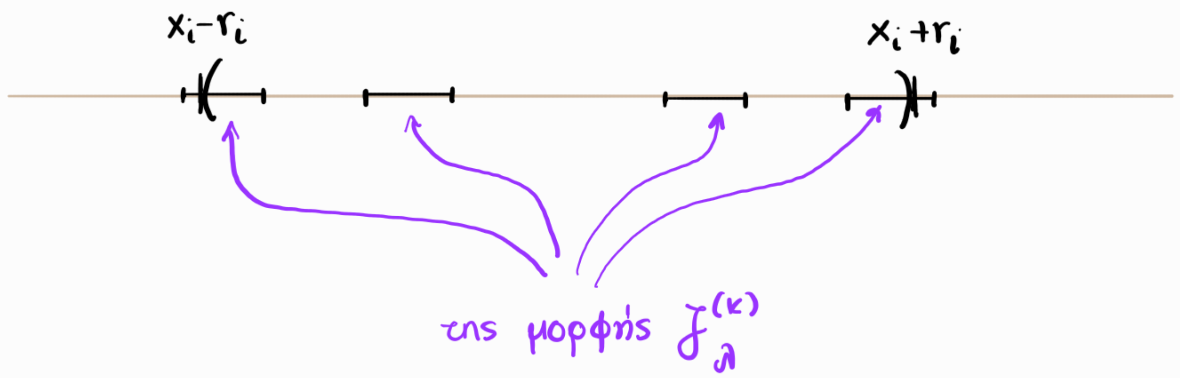
$$\overset{*_2}{=} \frac{1}{2^s}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{2^{s+2}}.$$

$\rightsquigarrow$ Μένει να δείξουμε την $(*)$. Έστω $i\in\{1,\dots,M\}$.

Η $(*)$ θα προέκυπτε άμεσα από την $(*_3)$, αν ξέραμε ότι το $(x_i-r_i, x_i+r_i) = J_\lambda^{(k)}$, για κάποιο $k\le n$ και κάποιο $\lambda\in\{1,\dots,2^k\}$ (τότε, δε θα χρειαζόταν και ο παράγοντας 4).

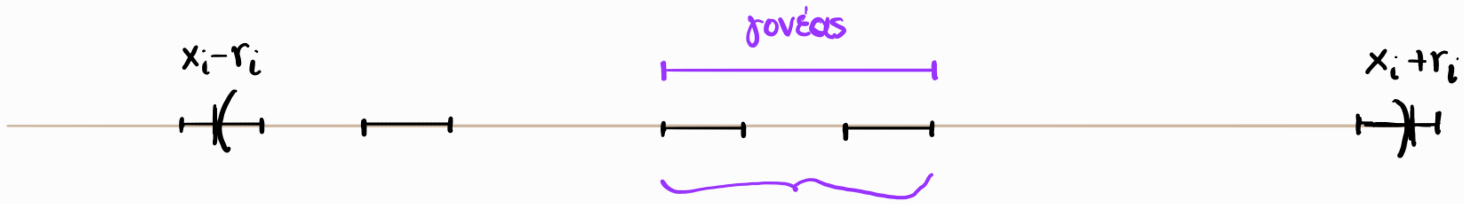
Αφού αυτό δεν ισχύει αναγκαστικά, παίρνουμε

$$k := \min\{m\in\mathbb{N} : \text{το } (x_i-r_i, x_i+r_i) \text{ περιέχει κάποιο } J_\lambda^{(m)}\} \le n.$$



- Κάθε $J_j^{(n)}$ με $J_j^{(n)} \subseteq (x_i - r_i, x_i + r_i)$, περιέχεται σε κάποιο από τα $J_\lambda^{(k)}$, το οποίο αναγκαστικά τέμνει το $(x_i - r_i, x_i + r_i)$.

- Όπως στο παραπάνω σχήμα, το $(x_i - r_i, x_i + r_i)$ τέμνει ≤ 4 από τα $J_\lambda^{(k)}$. Πράγματι, αν έτεμνε ≥ 5 από αυτά, τότε ≥ 2 θα περιέχονταν πλήρως στο $(x_i - r_i, x_i + r_i)$



<u>και</u> θα προέρχονταν από τον ίδιο γονέα του σταδίου $k-1$, ο οποίος <u>επίσης</u> θα περιεχόταν στο $(x_i - r_i, x_i + r_i)$.

Αυτό είναι άτοπο, λόγω της ιδιότητας του k ως minimum

- Άρα, κάθε $J_j^{(n)}$ που περιέχεται στο $(x_i - r_i, x_i + r_i)$ περιέχεται σε κάποιο από τα (≤ 4) $J_{\lambda_1}^{(k)}, J_{\lambda_2}^{(k)}, J_{\lambda_3}^{(k)}, J_{\lambda_4}^{(k)}$ που τέμνουν το $(x_i - r_i, x_i + r_i)$.

Άρα,

$$\sum_{j:\, J_j^{(n)} \subseteq (x_i - r_i,\, x_i + r_i)} \ell\left(J_j^{(n)}\right)^s \leq \sum_{m=1}^{4} \sum_{j:\, J_j^{(n)} \subseteq J_{\lambda_m}^{(k)}} \ell\left(J_j^{(n)}\right)^s$$

$$\overset{\ast_3}{=\!=} \sum_{m=1}^{4} \ell\left(J_{\lambda_m}^{(k)}\right)^s$$

όλα τα $J_{\lambda_m}^{(k)}$ έχουν το ίδιο μήκος, και ένα από αυτά περιέχεται στο $(x_i - r_i, x_i + r_i)$

$$\leq 4 \cdot \ell\Big((x_i - r_i,\, x_i + r_i)\Big)^s .$$

Η $\ast$ αποδείχθηκε.

■