→ Θεώρημα (Διάσταση Hausdorff αυτοόμοιου συνόλου): Έστω F συμπαγές αυτοόμοιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, με

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F),$$

για συστολές $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με τον ίδιο λόγο $r (\lneq 1)$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ με

$$U \supseteq S_1(U) \amalg \dots \amalg S_m(U)$$

χωρίς αναγκαστικά το U να σχετίζεται με το F (π.χ. $U \supseteq F$)

οι συστολές "διαχωρίζονται" με τη βοήθεια ενός ανοιχτού.

Τότε,

$$\boxed{\dim_H F = \frac{\log m}{\log(1/r)}}.$$

Π.χ., για C το σύνολο Cantor, $C = S_1(C) \cup S_2(C)$, όπου $S_1(x) = \frac{1}{3}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, και $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (συστολές με λόγο $\frac{1}{3}$). Έτσι, ένα ανοιχτό U που λειτουργεί είναι το $(0,1)$:

$$S_1((0,1)) = \left(0, \tfrac{1}{3}\right),$$
$$S_2((0,1)) = \left(\tfrac{2}{3}, 1\right),$$

ξένα σύνολα που περιέχονται στο $(0,1)$.

Έτσι, εφαρμόζουμε το Θεώρημα και παίρνουμε $\dim_H C = \dfrac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος θυμίζει λίγο την απόδειξη που έχουμε ήδη δει για το ότι $\dim_H C = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

→ Απόδειξη Θεωρήματος: Συμβολίζουμε $s := \frac{\log m}{\log(1/r)}$

και $\tilde{S}(A) := S_1(A) \cup \dots \cup S_m(A), \ \forall A \subseteq \mathbb{R}^d$.

- $\dim_H F \leq s$: (Αυτή η κατεύθυνση είναι απλή, και δεν προϋποθέτει και την ύπαρξη ενός $\mathcal{U}$ όπως στην εκφώνηση.)

Ξέρουμε ότι $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)$, για κάποια κλειστή μπάλα $B \subseteq \mathbb{R}^d$, για την οποία $\tilde{S}(B) \subseteq B$.

Άρα, $\forall k \in \mathbb{N}$, $F \subseteq \tilde{S}^k(B)$. Και:

- $\tilde{S}(B) = S_1(B) \cup \dots \cup S_m(B) \rightsquigarrow$ ένωση από m σύνολα, καθένα με διάμετρο $r \cdot \underbrace{\mathrm{diam}(B)}_{= c} = c \cdot r$.

- $\tilde{S}^2(B) = S_1\big(S_1(B) \cup \dots \cup S_m(B)\big) \cup \dots \cup S_m\big(S_1(B) \cup \dots \cup S_m(B)\big)$

$$= \bigcup_{(i,j) \in \{1,\dots,m\}^2} S_i S_j(B)$$ $\rightsquigarrow$ ένωση από m^2 σύνολα, καθένα με διάμετρο $r^2 \cdot \mathrm{diam}(B) = c \cdot r^2$.

⋮

- $$\tilde{S}^k(B) = S_1\Big(\bigcup_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in \{1,\dots,m\}^{k-1}} S_{i_{k-1}} \cdots S_{i_1}(B)\Big) \cup \dots$$

$$\dots \cup S_m\Big(\bigcup_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in \{1,\dots,m\}^{k-1}} S_{i_{k-1}} \cdots S_{i_1}(B)\Big) =$$

$$= \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,m\}^k} S_{i_k}\cdots S_{i_1}(B)$$

$\hookrightarrow$ ένωση από m^k σύνολα, καθε ένα με διάμετρο $r^k \cdot \text{diam}(B) = c \cdot r^k$.

⋮

κ.ο.κ.

Καθε σύνολο διαμέτρου Δ περιέχεται σε μια κλειστή μπάλα διαμέτρου Δ, άρα και σε μια ανοιχτή μπάλα ακτίνας Δ (δηλαδή διπλάσιας διαμέτρου). Επομένως:

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \text{ το } F \text{ καλύπτεται από } m^k \text{ ανοιχτές μπάλες, καθε μία με ακτίνα } c \cdot r^k.}$

Άρα, δείχνουμε ότι $H^s(F) < +\infty$ (για $s = \dfrac{\log m}{\log(1/r)}$) ως εξής:

Έστω $\delta > 0$. Για μεγάλα k, $c \cdot r^k < \delta$ (αφού $r \lneq 1 \Rightarrow r^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$).

Άρα, $$H^s_\delta(F) \leq m^k \cdot (c \cdot r^k)^s = c^s \cdot m^k \cdot (r^s)^k$$

$$= c^s \cdot m^k \cdot \left(r^{\log_{1/r} m}\right)^k$$

$$= c^s \cdot m^k \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^{\log_{1/r} m}}\right)^k$$

$$= c^s \cdot m^k \cdot \frac{1}{m^k} = c^s.$$

Άρα, $H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F) \leq c^s < +\infty$.

Επομένως, $\dim_H F \leq s$.

- $\dim_H F \geq s$: Αρκεί ΝΔΟ $H^s(F) \gneq 0$.

Αφού $H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$, αρκεί ΝΔΟ υπάρχει σταθερά $c_0 > 0$ ώστε: $\boxed{H^s_\delta(F) \geq c_0 \ , \ \forall \ 0<\delta<1.}$

Έστω λοιπόν $0<\delta<1$, και τυχαία κάλυψη

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i).$$

Πρέπει ΝΔΟ $\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \geq c_0$ (για σταθερά $c_0 > 0$ ανεξάρτητη του δ).

Αφού το F είναι συμπαγές, $\exists \ M \in \mathbb{N}$ ώστε

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, r_i).$$

(*)

Επομένως, αρκεί ΝΔΟ $\boxed{\sum_{i=1}^{M} r_i \geq c_0.}$

Ιδέα: Ξέρουμε ότι $F = \tilde{S}(F) = \tilde{S}^2(F) = \dots = \tilde{S}^k(F)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Σταθεροποιώντας κάποιο $\bar{x} \in F$, θα δούμε ότι η $\tilde{S}^k$ στέλνει το $\bar{x}$ σε m^k σημεία (μέσα στο F), τα οποία είναι σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους. Επομένως, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν σχετικά πολλές μπάλες μικρής ακτίνας για να καλυφθούν αυτά τα m^k σημεία του F. Έτσι, το $\sum_{i=1}^{M} r_i^s$ θα βγει μεγάλο.

Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\tilde{S}^k(A) = \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,m\}^k} S_{i_k} \cdots S_{i_1}(A).$$

Έτσι:

- Σταθεροποιούμε κάποιο $\bar{x} \in F$. Αποκαλούμε το σύνολο

$$\tilde{S}^k(\bar{x}) = \left\{ S_{i_k} \cdots S_{i_1}(\bar{x}) \ : \ (i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,m\}^k \right\} \ (\subseteq F)$$

τυπικά, ο σωστός συμβολισμός είναι $\tilde{S}^k(\{\bar{x}\})$

την <u>k-οστή γενιά του $\bar{x}$</u>, ή αλλιώς το σύνολο των <u>k-οστών απογόνων του $\bar{x}$</u>.

• Αποκαλούμε τα σύνολα

$S_{i_k}\cdots S_{i_1}(\mathcal{U})$, για όλα τα $(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,m\}^k$

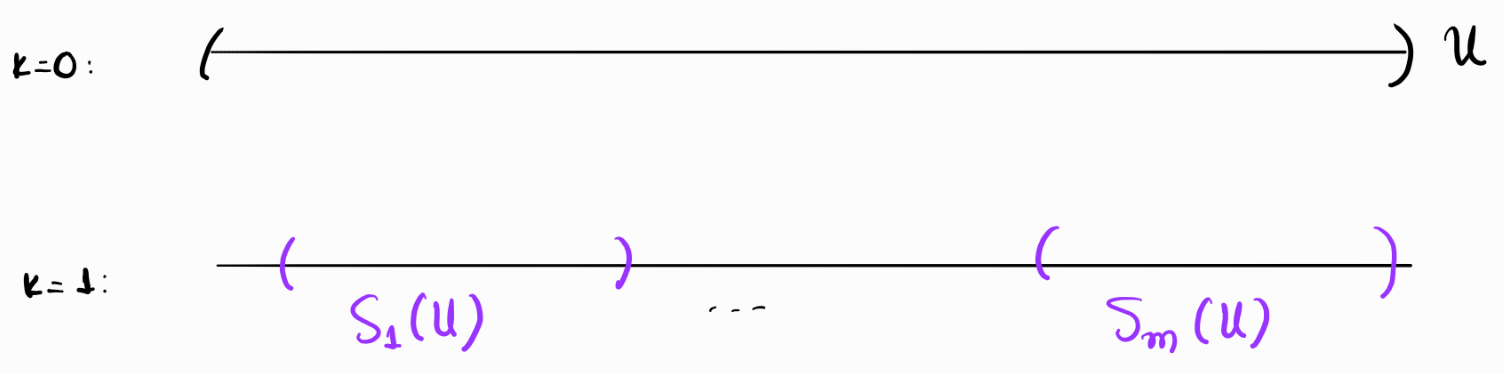
(των οποίων η ένωση είναι το $\mathcal{S}^k(\mathcal{U})$)

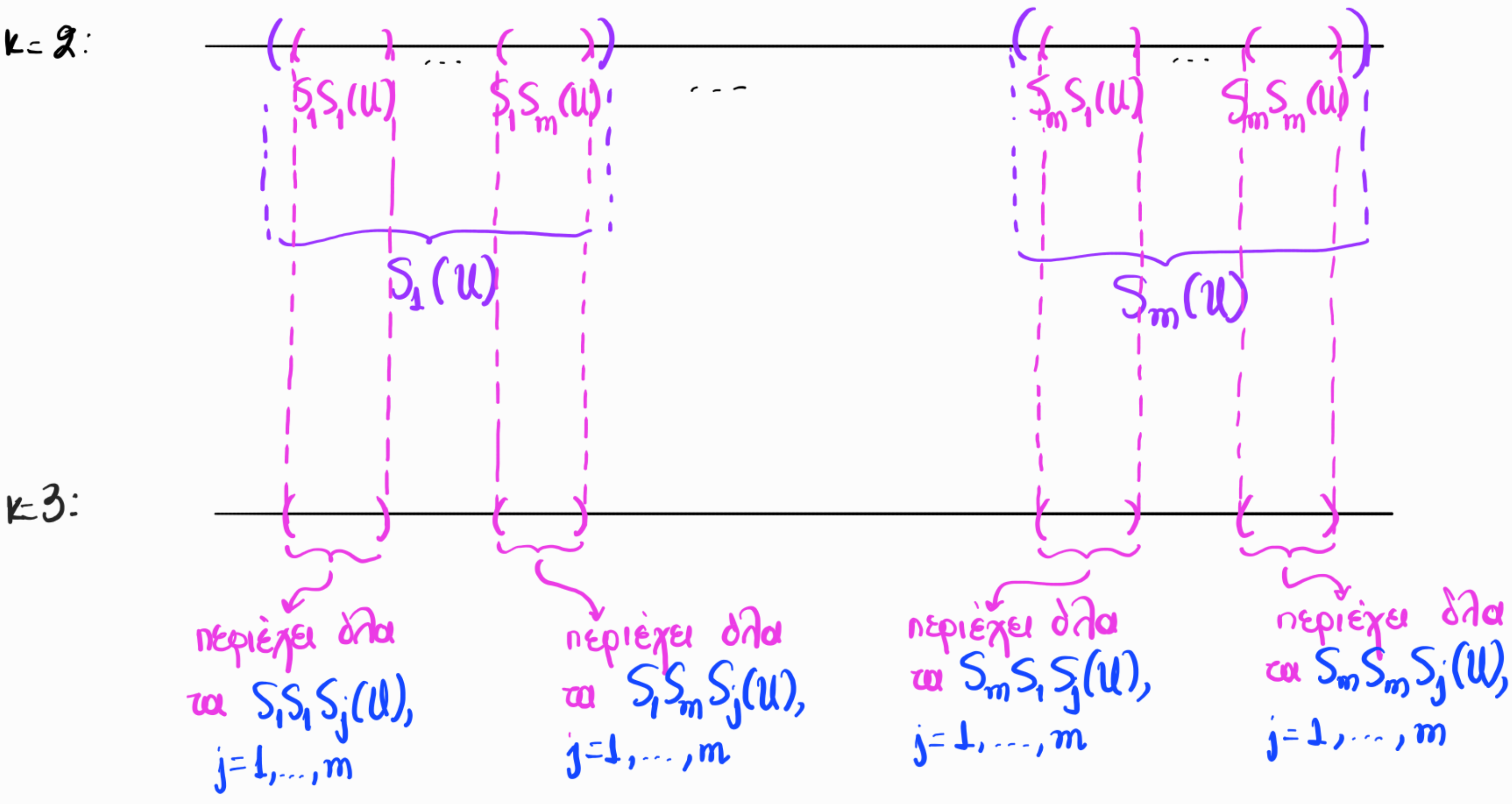
τα ανοιχτά σύνολα της k-οστής γενιάς.

→ $\forall k\in\mathbb{N}$, τα ανοιχτά σύνολα της k-οστής γενιάς είναι ξένα ανά δύο, και, $\forall n\geq k$, κάθε ανοιχτό της γενιάς k περιέχει m^{n-k} ανοιχτά της γενιάς n.

Αυτό οφείλονται στο ότι τα σύνολα της 1ης γενιάς (δηλαδή τα $S_1(\mathcal{U}),\dots,S_m(\mathcal{U})$) είναι ξένα ανά δύο (από υπόθεση) και περιέχονται στο $\mathcal{U}$, καθώς και στο ότι οι $S_1,\dots,S_m$ είναι 1-1 (ως συστολές.

Σχηματικά:





⋮

κ.ο.κ.

→ $\forall k \in \mathbb{N}$, τα ανοιχτά σύνολα της k-οστής γενιάς έχουν διάμετρο $= c' \cdot r^k$, όπου $c' > 0$ μια απόλυτη σταθερά (δηλαδή ανεξάρτητη του k και του λόγου ομοιότητας r).

Πράγματι, κάθε τέτοιο σύνολο είναι της μορφής

$$S_{i_k} \cdots S_{i_1}(U),$$

για κάποια $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$. Και

$$\operatorname{diam}\left(S_{i_k} \cdots S_{i_1}(U)\right) = r^k \cdot \underbrace{\operatorname{diam}(U)}_{=: c' \in (0,+\infty)}.$$

μπορούμε να επιλέξουμε U φραγμένο.

$\rightsquigarrow$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, τα ανοιχτά σύνολα της k-οστής γενιάς έχουν όγκο (λ_d) ίσο με $c'' \cdot (r^k)^d$, όπου $c'' = \lambda_d(U) \gtrsim 0$.

Πράγματι, $\forall\, (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, m\}^k$, η $S_{i_k} \cdots S_{i_1}$ είναι συστολή με λόγο r^k, άρα

$$\lambda_d \left(S_{i_k} \cdots S_{i_1} (U) \right) = (r^k)^d \cdot \lambda_d(U).$$

- Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδιότητες των ανοιχτών συνόλων της k-οστής γενιάς, δείχνουμε ότι τα στοιχεία του $\tilde{S}^k(\bar{x})$ είναι πολλά (και διαχωρισμένα). Συγκεκριμένα:

$\exists\, c''' > 0$ ώστε:

(*1)

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, m\}^k, \\ \operatorname{dist}\left(S_{i_k} \cdots S_{i_1}(\bar{x}),\ S_{i_k} \cdots S_{i_1}(U) \right) \leq c''' \cdot r^k. \end{gathered}}$$

Δηλ.: Ο τυχαίος k-οστός απόγονος του $\bar{x}$ απέχει κατά $\leq r^k$ από κάποιο ανοιχτό της k-οστής γενιάς.

Πράγματι, αφού οι $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ είναι συστολές με λόγο r, η σύνθεση $S_{i_k} \cdots S_{i_1}$ είναι συστολή με λόγο r^k,

άρα

$$\text{dist}\left(S_{i_k}\cdots S_{i_1}(\bar{x}),\, S_{i_k}\cdots S_{i_1}(U)\right) = r^k \cdot \overbrace{\text{dist}(\bar{x}, U)}^{\text{σταθερά} \geq 0}$$

$$\leq c''' \cdot r^k,$$

για $c''' := \text{dist}(\bar{x}, U) + 1 \,(\geq 0)$.

Άρα: $\exists$ σταθερές $C, C' > 0$ ώστε, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$\boxed{\# \tilde{S}^k(\bar{x}) \geq C' \cdot m^k}$ (*2) και

(I) για κάθε μπάλα $\tilde{B}$ ακτίνας r^k, υπάρχουν $\leq C$ στοιχεία $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ ώστε $S_{i_k} \cdots S_{i_1}(x) \in \tilde{B}$:

Αρκεί να δειχθεί ο ισχυρισμός (I). Τότε, η (*2) προκύπτει άμεσα, αφού η απεικόνιση

$$(i_1, \dots, i_k) \longrightarrow S_{i_k} \cdots S_{i_1}(\bar{x})$$

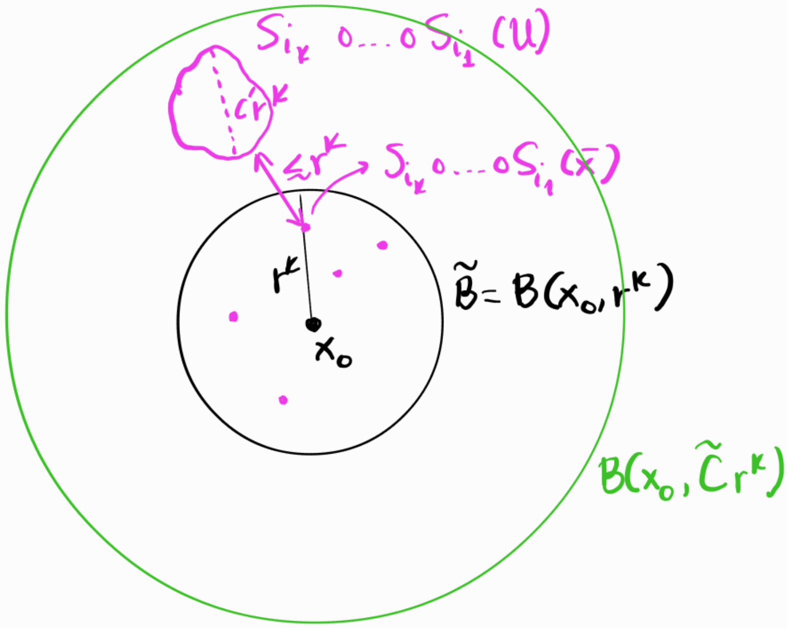
είναι "$(\leq C)$ προς 1".

Απόδ. του (I): Έστω N το πλήθος των στοιχείων του $\tilde{S}^k(\bar{x})$ μέσα στην $\tilde{B}$. Έστω ότι $\tilde{B} = B(x_0, r^k)$.

Τότε, υπάρχουν N ανοιχτά της k-οστής γενιάς που απέχουν κατά $\lesssim r^k$ από το x_0,

$\leq$ σταθερά $\cdot\, r^k$

και άρα, αφού έχουν διάμετρο $c' \cdot r^k$, περιέχονται όλα στη $B(x_0, \tilde{C} \cdot r^k)$, για κατάλληλη σταθερά $\tilde{C} > 1$.



Αυτά τα N σύνολα έχουν όγκο $\lambda_d(U) \cdot r^{kd} = c'' \cdot r^{kd}$ το καθένα, και είναι ξένα ανά δύο. Επομένως, η μπάλα $B(x_0, \tilde{C} r^k)$, που έχει ακτίνα $\sim r^k$ και άρα όγκο $\tilde{C}' \cdot r^{kd}$, μπορεί να περιέχει το πολύ $\dfrac{\tilde{C}' \cdot \cancel{r^{kd}}}{c'' \cdot \cancel{r^{kd}}} = C$ (σταθερά) από αυτά. Άρα, $N \leq C$.

Αυτή η ανάλυση θα μας χρειαστεί μέσα σε κάθε μεγαλύτερη μπάλα κέντρου x_0.

- Επιστρέφουμε τώρα στην αρχική κάλυψη $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} B(x_i, r_i)$.

Οργανώνουμε τις μπάλες ανάλογα με τις διαμέτρους τους (ανάλογα με το για ποιό ℓ έχουμε $\operatorname{diam}(B(x_i,r_i)) \sim r^{\ell}$).

ο λόγος ομοιότητας

Συγκεκριμένα, οι διάμετροι των μπαλών ανήκουν στο $(0,2\delta) \subseteq (0,1)$.

Άρα, $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$\mathcal{B}_\ell := \{ B(x_i,r_i) : \ r^{\ell} \leq \operatorname{diam}\big(B(x_i,r_i)\big) < r^{\ell-1} \}$$

και έτσι κάθε $B(x_i,r_i)$ $(i=1,\dots,M)$ ανήκει σε κάποιο μοναδικό από τα $\mathcal{B}_\ell$.

Αφού οι μπάλες είναι πεπερασμένες το πλήθος,

$$\exists \ \max\{ \ell \in \mathbb{N} : \mathcal{B}_\ell \neq \emptyset \} =: k_0$$

δηλαδή, η μικρότερη από τις μπάλες έχει ακτίνα "πρακτικά" r^{k_0}.

- Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

(*3)

$$\sum_{\ell=1}^{k_0} \ \sum_{B(x_i,r_i)\in\mathcal{B}_\ell} \underbrace{\#\{ k_0\text{-οστοί απόγονοι του } \bar{x} \text{ στην } B(x_i,r_i)\}}_{= \ \tilde{S}^{k_0}(\bar{x}) \cap B(x_i,r_i)}$$

$$\geq \underbrace{\#\{ k_0\text{-οστοί απόγονοι του } \bar{x}\}}_{\geq C' \cdot m^{k_0}}.$$

- $\forall\, \ell \leq k_0$, $\forall\, B(x_i, r_i) \in \mathcal{B}_\ell$, έχουμε ότι

$$\boxed{\#\left(\tilde{S}^{k_0}(\bar{x}) \cap B(x_i, r_i)\right) \leq \frac{C''}{r^d} \cdot m^{k_0-\ell}.}$$

(*4)

Για ευκολία της απόδειξης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο c για να συμβολίζουμε πολλαπλασιαστικές σταθερές, οι οποίες όμως μπορεί να είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

- Κάθε $v \in \tilde{S}^{k_0}(\bar{x}) \cap B(x_i, r_i)$ $\left(v = S_{i_{k_0}} \cdots S_{i_1}(\bar{x}),\right.$ για κάποια $\left. i_1, \ldots, i_{k_0} \in \{1, \ldots, m\}\right)$ απέχει κατά $\leq c \cdot r^{k_0}$ από το ανοιχτό $\mathcal{U}^{k_0}(v) := S_{i_{k_0}} \cdots S_{i_1}(\mathcal{U})$ της γενιάς k_0, το οποίο έχει $\operatorname{diam}\left(\mathcal{U}^{k_0}(v)\right) = c \cdot r^{k_0}$.

- Υπάρχει μοναδικό ανοιχτό $\mathcal{U}^\ell(v)$ της γενιάς ℓ που περιέχει το $\mathcal{U}^{k_0}(v)$. Και $\operatorname{diam}\left(\mathcal{U}^\ell(v)\right) = c \cdot r^\ell$.

- Η $B(x_i, r_i)$ έχει διάμετρο $\geq r^\ell$. Άρα, συμβολίζοντας με B_i^* τη μπάλα με κέντρο x_i και ακτίνα $C \cdot r_i$, για κατάλληλη μεγάλη σταθερά $C > 0$, προκύπτει ότι η $B_i^* \supseteq U^\ell(v) \ (\supseteq U^{k_0}(v)),\ \forall v \in \tilde{S}^{k_0}(\bar{x}) \cap B(x_i, r_i)$.

- Η B_i^* έχει όγκο $\leq c \cdot r^{(\ell-1)d}$, ενώ κάθε ανοιχτό της γενιάς ℓ έχει όγκο $= c \cdot r^{\ell d}$. Άρα, η B_i^* περιέχει το πολύ $c \cdot \frac{r^{(\ell-1)d}}{r^{\ell d}} = \frac{c}{r^d}$ ανοιχτά της γενιάς ℓ.

- Κάθε ανοιχτό της γενιάς ℓ περιέχει $m^{k_0-\ell}$ ανοιχτά της γενιάς k_0.

- Κάθε ανοιχτό της γενιάς k_0 έχει διάμετρο $= c \cdot r^{k_0}$, άρα περιέχει $\leq c$ στοιχεία του $\tilde{S}^{k_0}(\bar{x})$.

Από όλα τα παραπάνω,

$$\#\left(\tilde{S}^{k_0}(\bar{x}) \cap B(x_i, r_i)\right) \leq \frac{c}{r^d} \cdot m^{k_0-\ell}.$$

- $*_3 \overset{*_4}{\Longrightarrow} \sum_{\ell=1}^{k_0} \# \mathcal{B}_\ell \cdot \frac{C''}{r^d} \cdot m^{k_0-\ell} \geq C' \cdot m^{k_0}$,

δηλαδή $\boxed{\sum_{\ell=1}^{k_0} \# \mathcal{B}_\ell \cdot \frac{1}{m^\ell} \geq c \cdot r^d.}$ $*_5$

Ειδικά λόγω της επιλογής μας $s = \dfrac{\log m}{\log(1/r)} = \log_{1/r} m$,

παρατηρούμε ότι $\dfrac{1}{m^\ell} = (r^\ell)^s$:

$$(r^\ell)^s = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r}\right)^s\right]^\ell} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{r}\right)^{\log_{1/r} m}\right]^\ell} = \frac{1}{m^\ell}.$$

Άρα, η *5 γίνεται:

$$\sum_{\ell=1}^{k_0} \#\mathcal{B}_\ell \cdot (r^\ell)^s \geq c \cdot r^d$$

$$\Longrightarrow \sum_{\ell=1}^{k_0} \sum_{B(x_i,r_i)\in\mathcal{B}_\ell} (2r_i)^s \geq c \cdot r^d$$

κάθε $B(x_i,r_i) \in \mathcal{B}_\ell$ έχει διάμετρο $2r_i \geq r^\ell$

$$\Longrightarrow \sum_{\ell=1}^{k_0} \sum_{B(x_i,r_i)\in\mathcal{B}_\ell} r_i^s \geq \frac{c \cdot r^d}{2^s}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} r_i^s \geq \boxed{\frac{c \cdot r^d}{2^s}}$$

$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{k_0} = \{B(x_i,r_i) : i=1,\dots,M\}$

σταθερά >0

■