→ Ασκήσεις στη διάσταση Hausdorff:

① Δείξτε τα εξής:

(a) Έστω $A \subseteq B$ στον $\mathbb{R}^d$. Τότε, $\dim_H A \leq \dim_H B$.

(b) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, με $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (για κάποια $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Τότε, $\dim_H A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n$.

<u>Λύση</u>: (a) $\forall s \geq 0$, το H^s είναι εξωτερικό μέτρο στον $\mathbb{R}^d$, άρα

$$A \subseteq B \underset{\substack{\text{μονοτονία} \\ \text{εξωτ. μέτρων}}}{\Longrightarrow} H^s(A) \leq H^s(B).$$

Άρα, αν για κάποιο $s \geq 0$ έχουμε ότι $H^s(B) = 0$, τότε έχουμε και ότι $H^s(A) = 0$. Επομένως:

$$\{s \geq 0 : H^s(B) = 0\} \subseteq \{s \geq 0 : H^s(A) = 0\}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\inf \{s \geq 0 : H^s(B) = 0\}}_{= \dim_H B} \geq \underbrace{\inf \{s \geq 0 : H^s(A) = 0\}}_{= \dim_H A}.$$

(b) $\dim_H A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n$:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq A \overset{(a)}{\Longrightarrow} \dim_H A_n \leq \dim_H A \Longrightarrow \boxed{\sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n \leq \dim_H A.}$

- $\boxed{\dim_H A \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n :}$ Αν το supremum είναι άπειρο, τότε είμαστε OK. Αν είναι πεπερασμένο:

$\forall s \gneq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dim_H A_n$, έχουμε ότι:

$$H^s(A_n)=0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \longrightarrow H^s(A) = H^s\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \underset{\substack{H^s \text{ εξωτ.} \\ \text{μέτρο}}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} H^s(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Άρα, $H^s(A)=0 \quad \forall s \gneq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dim_H A_n$

$$\Longrightarrow \dim_H A \ \Big(= \inf \underbrace{\{s\geq 0 : H^s(A)=0\}}_{\supseteq \left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dim_H A_n,\ +\infty\right)}\Big) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H A_n.$$

■

2. Κατασκευάστε ένα $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$ και $\dim_H A=1$.

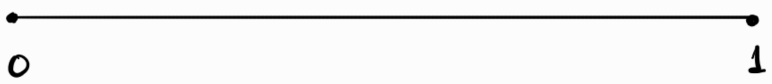
<u>Λύση:</u> Θα κατασκευάσουμε σύνολα $A_n\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A_n)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ και $\lambda(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Τότε, από το 1(b), το $A := \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ θα έχει

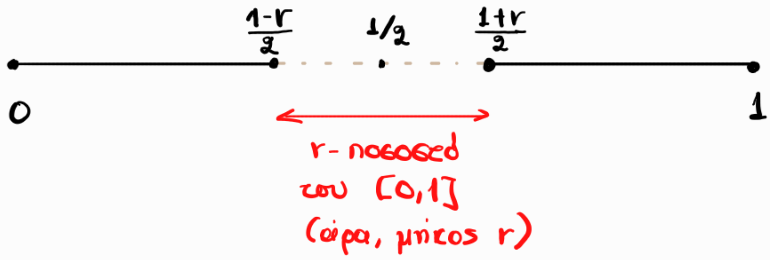
$\dim_H A = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dim_H A_n = 1$ (και φυσικά $\lambda(A)=0$).

Έστω <u>$0<r<1$</u>. Κατασκευάζουμε μια παραλλαγή C_r του συνόλου Cantor C, όπου σε κάθε στάδιο αφαιρούμε το μεσαίο (ανοιχτό) r-ποσοστό από κάθε κλειστό διάστημα του προηγούμενου σταδίου:

$C_0 :=$



$C_1 :=$



$\lambda(C_1) = (1-r)\cdot\lambda(C_0)$
$= 1-r.$

$C_2 :=$

Για να σχηματιστεί το C_2, αφαιρέσαμε το r-ποσοστό κάθε κλειστού διαστήματος του C_1, άρα αφαιρέσαμε ένα r-ποσοστό του C_1. Άρα,

$\lambda(C_2) = (1-r)\,\lambda(C_1)$
$= (1-r)^2.$

$\vdots$

Ορίζουμε $C_r := \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$, όπου $\lambda(C_n) = (1-r)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Το C_r είναι κλειστό, άρα ορίζεται το $\lambda(C_r)$.

Μάλιστα, $\lambda(C_r) = 0$, αφού $C_r \subseteq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left(\Rightarrow \lambda(C_r) \leq \lambda(C_n) = (1-r)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right).$

Η ιδέα είναι ότι, καθώς $r \downarrow 0$, αφαιρούμε όλο και λιγότερο από το $[0,1]$ για να πάρουμε το C_r, και άρα είναι λογικό η διάσταση του C_r να μεγαλώνει. Και όντως:

$$C_r = S_1(C_r) \cup S_2(C_r),$$ όπου

οι S_1, S_2 είναι οι συστολές:

$$\begin{cases} S_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad S_1(x) = \frac{1-r}{2} \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \\ S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad S_2(x) = \frac{1-r}{2} \cdot x + \frac{1+r}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

οι οποίες έχουν και οι δύο λόγο $\frac{1-r}{2}$ (<1).

Αφού επιπλέον τα $S_1((0,1)) = (0, \frac{1-r}{2})$, $S_2((0,1)) = (\frac{1+r}{2}, 1)$ είναι ξένα και περιέχονται στο $(0,1)$, το συμπαγές C_r ικανοποιεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις για να αποφανθούμε ότι

$$\dim_H C_r = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\frac{1-r}{2}}\right)} = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-r}} \xrightarrow[r \to 0^+]{(*)} \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-0}} = 1.$$

Επομένως, επιλέγοντας $r = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε ότι

το $\tilde{C} := \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{1/n}$ έχει μέτρο $0 \leq \lambda(\tilde{C}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda(C_{1/n})}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$,

δηλ. $\lambda(\tilde{C}) = 0$, και διάσταση Hausdorff

$$\dim_H \tilde{C} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H C_{1/n} \overset{(*)}{=} 1.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{1/n} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \dim_H C_{1/n} \leq 1$.

■

③ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f: A \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-συνεχής, με σταθερά Lipschitz $M \in [0,+\infty)$. Δείξτε ότι

$$H^s(f(A)) \leq M^s \cdot H^s(A) \quad \forall s \geq 0$$

και ότι $\quad \dim_H f(A) \leq \dim_H A.$

(Δηλαδή: Η διάσταση Hausdorff <u>δεν</u> μπορεί να αυξηθεί μετά από εφαρμογή Lipschitz απεικόνισης.)

<u>Λύση</u>: Έστω $s \geq 0$. Έστω $\delta > 0$ και κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, r_i)$, με $r_i \leq \delta \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Τότε, $$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} \underbrace{f\left(B(x_i,r_i)\right)} \subseteq \bigcup \tilde{B}_i,$$

$\operatorname{diam} f(B(x_i,r_i)) \leq M \cdot \operatorname{diam}(B(x_i,r_i))$, άρα καλύπτεται από ανοιχτή μπάλα $\tilde{B}_i$, ακτίνας $M \cdot r_i$

άρα $$\sum_{i=1}^{+\infty} (Mr_i)^s \geq H^s_{M\delta}(f(A))$$

$$\Rightarrow H^s_{M\delta}(f(A)) \leq M^s \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s \quad , \text{ για την τυχαία κάλυψη}$$

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i) \text{ με } r_i \leq \delta \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας infimum πάνω σε όλες αυτές τις καλύψεις, βλέπουμε ότι

$$H^s_{M\delta}(f(A)) \leq M^s H^s_\delta(A), \quad \forall \delta > 0$$

$$\xrightarrow[\delta \to 0]{} \quad H^s(f(A)) \le M^s H^s(A).$$

Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι $\dim_H f(A) \le \dim_H A$,

καθώς $\left(H^s(A) = 0 \Rightarrow H^s(f(A)) = 0 \right)$.

■

με την έννοια της γραμμικής άλγεβρας

④ Έστω Π επίπεδο διάστασης k στον $\mathbb{R}^d$. Συμβολίζουμε με

$\mathrm{proj}_\Pi : \mathbb{R}^d \to \Pi$ την ορθογώνια προβολή των στοιχείων του $\mathbb{R}^d$ στο Π.

Δείξτε ότι, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$H^s(\mathrm{proj}_\Pi A) \le H^s(A) \quad \forall s \geq 0,$$

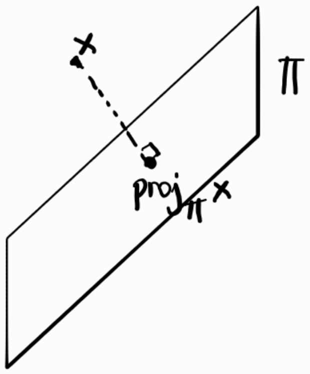
και

$$\dim_H \mathrm{proj}_\Pi A \le \dim_H A.$$

Οι προβολές δεν αυξάνουν ούτε μέτρα ούτε διάσταση Hausdorff.

Λύση:

$\mathbb{R}^d$



Η $\mathrm{proj}_\Pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά Lipschitz 1

(καθώς $|\mathrm{proj}_\Pi x - \mathrm{proj}_\Pi y| \le |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$).

Άρα, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την άσκηση 3.

■

⑤ Δείξτε ότι το $B := \{x^2 : x \in C\}$ έχει $\dim_H B \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.

<u>Λύση</u>: $B = f(C)$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

με $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι Lipschitz συνεχής: $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα $|f'| \leq 2$ στο $[0,1]$, επομένως : από Θεώρημα Μέσης Τιμής,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

Από την άσκηση 3, $\dim_H f(\underbrace{C}_{\subseteq [0,1]}) \leq \dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$.

■

⑥ (a) Έστω $s \geq 0$. Ένα μέτρο μ στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^d$ λέγεται μέτρο Frostman διάστασης $\geq s$ αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\mu(B(x,r)) \leq c \cdot r^s, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ και } \forall r > 0.$$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι, αν υπάρχει μέτρο Frostman μ, διάστασης $\geq s$, ώστε $\mu(A) > 0$, τότε ισχύει και ότι $\mathcal{H}^s(A) > 0$ (και άρα $\dim_H A \geq s$).

Αυτό είναι χρήσιμο αν θέλουμε να δείξουμε ότι $\dim_H A \geq s$ για κάποιο $A \subseteq \mathbb{R}^d$, καθώς μπορεί να είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το $\mathcal{H}^s(A)$, αλλά εύκολο να δημιουργήσουμε ένα <u>άλλο</u> μέτρο Frostman διάστασης $\geq s$, με $\mu(A) > 0$. (Παράδειγμα στο (b)).

(b) Χρησιμοποιώντας το (α), εξηγήστε ότι κάθε C^∞ κ-διάστατη (με την έννοια της διαφορικής γεωμετρίας) πολλαπλότητα Σ στον $\mathbb{R}^d$ έχει $\dim_H \Sigma \geq \kappa$.

<u>Λύση:</u> (α) Έστω $\delta>0$ και κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i,r_i)$, με $r_i \leq \delta$ $\forall i\in\mathbb{N}$.

Τότε,
$$\sum_{i=1}^{+\infty} r_i^s = \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{+\infty} c r_i^s \geq \frac{1}{c}\cdot\sum_{i=1}^{+\infty} \mu\big(B(x_i,r_i)\big)$$
$$\geq \frac{1}{c}\cdot\mu(A).$$

υποπροσθετικότητα
του μ

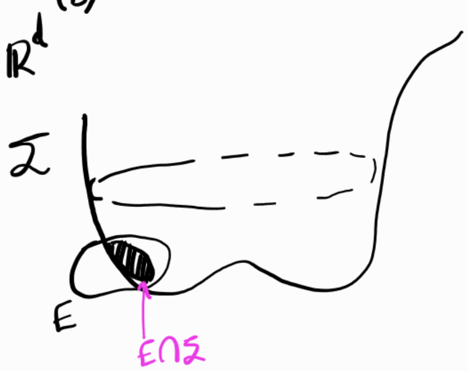
Παίρνοντας infimum πάνω σε όλες αυτές τις καλύψεις του A:

$$H^s_\delta(A) \geq \frac{1}{c}\cdot\mu(A), \quad \forall \delta>0$$

$$\xRightarrow{\delta\to 0} \quad H^s(A) \geq \frac{1}{c}\cdot\mu(A) \gneq 0.$$

(Άρα, $\dim_H A \geq s$.)

(b)



Το μέτρο σ που επάγεται από το μέτρο Lebesgue πάνω στη Σ είναι μέτρο Frostman διάστασης $\geq \kappa$, και $\sigma(\Sigma)>0$
($\Rightarrow \dim_H \Sigma \geq \kappa$).

Συνοπτικά: Στην πράξη, $\forall E\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, το $\sigma(E)$ είναι το "κ-διάστατο εμβαδόν" του $E\cap\Sigma$. Ορίζεται ως εξής:

Ορίζουμε πρώτα $\sigma^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,+\infty]$,

$$\text{με} \quad \sigma^*(E) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\lambda_d\left((E \cap \Sigma)^\delta \right)}{\delta^{d-k}} \quad , \; \forall E \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Το σ^* είναι εξωτερικό μέτρο, άρα το $\sigma := \sigma^*|_{\mathcal{M}_{\sigma^*}}$ είναι μέτρο, όπου η $\mathcal{M}_{\sigma^*}$ είναι η σ-άλγεβρα των σ^*-μετρήσιμων συνόλων.

Αποδεικνύεται ότι $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\sigma^*}$.

Είναι απλό να δει κανείς ότι $\sigma(B(x,r)) \leq c \cdot r^k, \; \forall r>0$ (όπου η σταθερά c εξαρτάται από την καμπυλότητα της Σ), και ότι $\sigma(\Sigma) \gtrsim 0$ (αφού το $\sigma(\Sigma)$ είναι το "κ-διάστατο εμβαδό" της Σ).

∎

(7) Έστω X η χιονονιφάδα του Koch.

$$\dim_H X = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 4}{\log 3},$$ από απλή εφαρμογή γνωστού θεωρήματος.

Είναι ενδιαφέρον εδώ ότι η X, που έχει διάσταση Hausdorff $\gtrsim 1$, έχει και άπειρο μήκος. Στην επόμενη άσκηση θα δούμε ότι συνεχείς (και απλές) καμπύλες πεπερασμένου μήκους έχουν διάσταση Hausdorff ακριβώς 1.

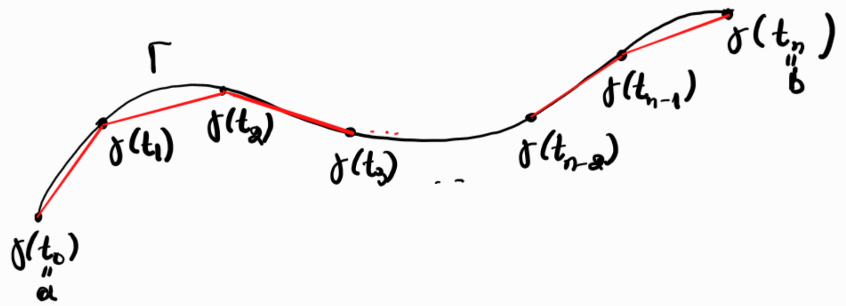
(8) Έστω Γ συνεχής, απλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^d$ (όχι αναγκαστικά παραγωγίσιμη), με πεπερασμένο μήκος.

δεν τέμνει τον εαυτό της

Συγκεκριμένα, το μήκος L της Γ ορίζεται ως το supremum των μηκών των πολυγωνικών γραμμών με κορυφές στη Γ.

Δηλαδή, παίρνοντας μία παραμέτρηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ της Γ,

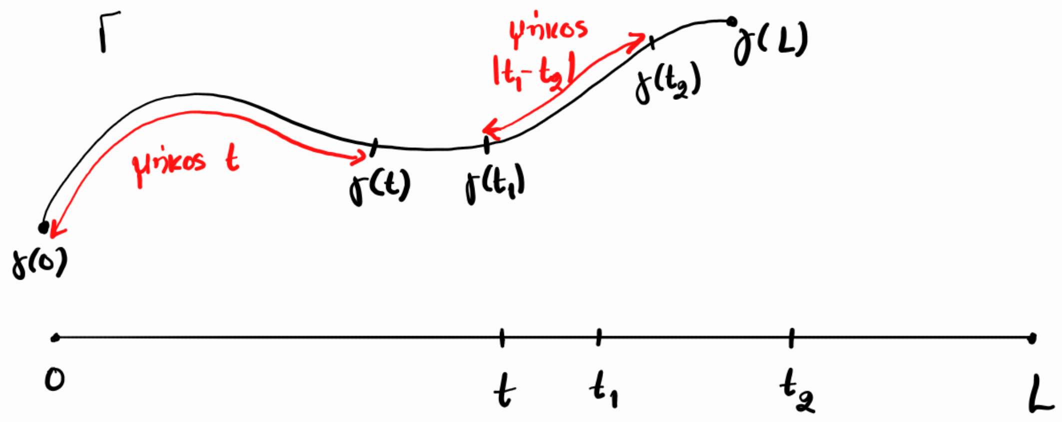
$$L := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N} \text{ και } \underset{a}{\overset{\parallel}{t_0}} < t_1 < \dots < \underset{b}{\overset{\parallel}{t_n}} \right\}.$$



Δείξτε ότι $H^1(\Gamma) = \frac{1}{2} L$ (και άρα $\dim_H \Gamma = 1$).

ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημαντικός, και οφείλεται στο ότι, στον ορισμό του H^1_δ, $\forall \delta > 0$, επιλέξαμε να προσθέτουμε ακτίνες και όχι διαμέτρους.

Λύση: Παραμετρικοποιούμε τη Γ κατά μήκος τόξου: χρησιμοποιούμε συνεχή $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^d$, με $\Gamma = \gamma([0,L])$, ώστε, $\forall\, t\in[0,L]$, το $\gamma(t)$ να είναι το σημείο της Γ με την ιδιότητα ότι μήκος $\big(\Gamma([0,t])\big) = t$.



Τότε, $\underbrace{|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|}_{\substack{\text{μήκος ευθ.}\\ \text{τμήματος που συνδέει}\\ \text{τα } \gamma(t_1),\,\gamma(t_2)}} \le \underbrace{|t_1-t_2|}_{\substack{\text{μήκος της } \Gamma\\ \text{μεταξύ των}\\ \gamma(t_1),\,\gamma(t_2)}}$,

άρα η γ είναι Lipschitz-συνεχής, με σταθερά Lipschitz 1.

Άρα, από την άσκηση 3,

$$\boxed{H^1\big(\underbrace{\gamma([0,L])}_{=\Gamma}\big) \le H^1([0,L]) \underset{\text{απλό}}{=} \frac{L}{2}}\,.$$

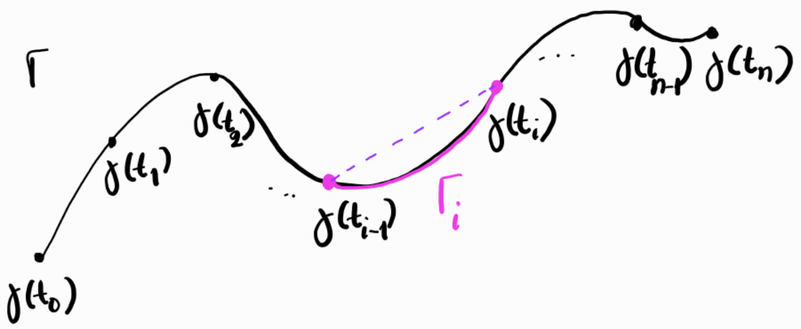
Μένει να δειχθεί ότι $\boxed{H^1(\Gamma) \ge \frac{L}{2}}$.

Χρησιμοποιούμε ότι

$$L = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})| : n\in\mathbb{N},\ \underset{\substack{\| \\ 0}}{t_0} < t_1 < \dots < \underset{\substack{\| \\ L}}{t_n} \Big\},$$

και ΘΔΟ, $\forall\ \underset{0}{\underset{\parallel}{t_0}} < t_1 < \dots < \underset{L}{\underset{\parallel}{t_n}}$, $H^1(\Gamma) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$.

Αυτό συνεπάγεται ότι $H^1(\Gamma) \geq \frac{L}{2}$. Σταθεροποιούμε λοιπόν διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = L$ του $[0, L]$.



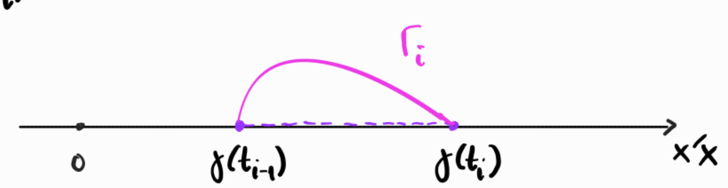
$\forall\ i=1,\dots,n$, ορίζουμε $\Gamma_i := \{\gamma(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$.

Έχουμε $H^1(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} H^1(\Gamma_i)$ (το H^1 είναι μέτρο Borel (το έχουμε αναφέρει), και κάθε $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Gamma$ είναι Borel $\subseteq \mathbb{R}^d$, ως συνεχής εικόνα συμπαγούς διαστήματος).

Άρα, για ΝΔΟ $H^1(\Gamma) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$,

αρκεί ΝΔΟ $H^1(\Gamma_i) \geq \dfrac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{2}$, $\forall\ i=1,\dots,n$.

Και όντως: περιστρέφουμε κατάλληλα τον $\mathbb{R}^d$, ώστε το τμήμα που συνδέει τα $\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)$ να ζει μέσα στον $x'x$ $(= \text{span}\{e_1\})$, με $\gamma(t_{i-1}) < \gamma(t_i)$:



Τότε, $\quad \operatorname{proj}_{x'x} \Gamma_i \supseteq [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$, άρα

$$\mathcal{H}^1(\operatorname{proj}_{x'x} \Gamma_i) \geq \mathcal{H}^1([\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]) \underset{\text{απλό}}{=\!=} \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{2}.$$

Όμως, από άσκηση 3,

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_i) \geq \mathcal{H}^1(\operatorname{proj}_{x'x} \Gamma_i)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}^1(\Gamma_i) \geq \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{2}, \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎