→ Συναρτησιακή Ανάλυση: Ασθενείς και ασθενείς* τοπολογίες.

→ $\boxed{\text{Προαπαιτούμενα:}}$

→ Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα, και

$T: X \to Y$ γραμμική.

Ορίζουμε $\|T\| := \underbrace{\inf}_{\substack{\| \\ \min}} \{M \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \ \forall x \in X\}$.

(αποδεικνύεται), και ίσως $\|T\| = +\infty$.

Άρα, η $\|T\|$ είναι ο μεγαλύτερος παράγοντας κατά τον οποίο η T δικαιούται να μεταβάλλει μήκη:

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

→ δηλ. τα μήκη αλλάζουν το πολύ κατά $\|T\|$

και η σταθερά $\|T\|$ εδώ <u>δεν</u> μπορεί να μικρύνει, που θα πει ότι σίγουρα υπάρχουν διανύσματα $x \in X$ που η T μεταβάλλει τα μήκη τους πρακτικά κατά $\|T\|$.

Από τον ορισμό αυτό, βλέπουμε ότι

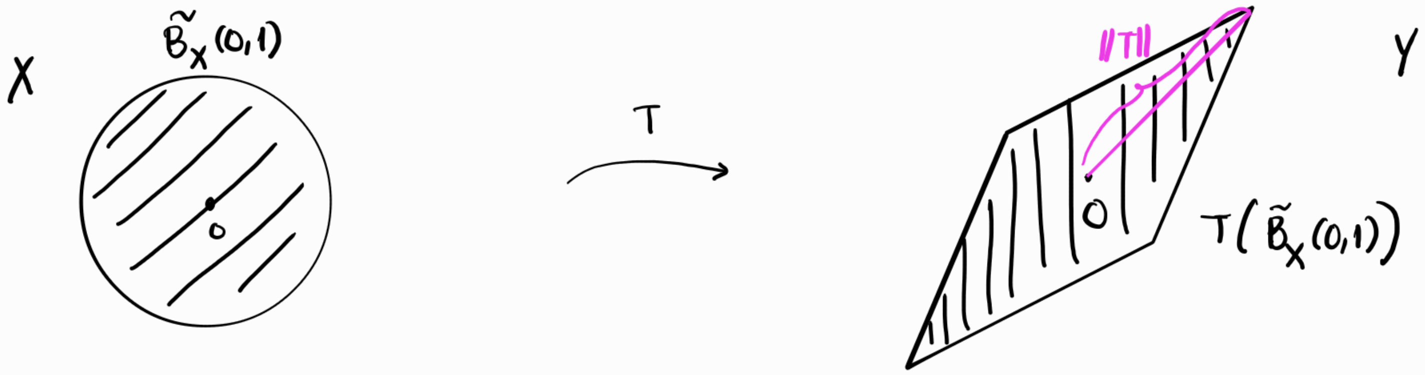
$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y =$$

$$= \sup_{x \in S_X(0,1)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \widetilde{B}_X(0,1)} \|Tx\|_Y$$

→ "κοντύτερα" διανύσματα έχουν "κοντύτερες" εικόνες, λόγω του ότι η T είναι γραμμική.

(όπου $S_X(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$,

$\widetilde{B}_X(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$).



Αν $\|T\|<+\infty$, λέμε ότι η T είναι φραγμένη γραμμική απεικόνιση.

⚠ Μία φραγμένη γραμμική απεικόνιση $T: X \to Y$ είναι άφραχτη ως συνάρτηση (εκτός αν $T=0$).

Αποδεικνύεται ότι:

Για κάθε γραμμική $T: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$,

η T είναι φραγμένη

$\Leftrightarrow$ η T είναι συνεχής

$\Leftrightarrow$ η T είναι συνεχής στο 0

$\Leftrightarrow$ η T είναι Lipschitz-συνεχής.

Για $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, τα παραπάνω επιπλέον ισχύουν

$\Leftrightarrow$ ο $\ker T$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(X, \|\cdot\|)$.

→ Τοπολογικοί χώροι

→ <u>Ορισμός</u>: Έστω $X \neq \emptyset$.

⊙ <u>Τοπολογία στον X</u> ονομάζεται κάθε οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X, με τις εξής ιδιότητες:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
- Αν $U_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

  I → κάποιο σύνολο δεικτών

- Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{C})$, και αποκαλούμε <u>την τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{C}$</u>, τη μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τη $\mathcal{C}$.

Η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η τομή όλων των τοπολογιών στον X που περιέχουν τη $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X.

- Μία $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ λέγεται βάση της $\mathcal{T}$ αν κάθε $U \in \mathcal{T}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.

- Αν $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$, τότε η

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} := \{\text{πεπερασμένες τομές στοιχείων της } \mathcal{C}\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathcal{T}$.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{T}' := \{\text{ενώσεις στοιχείων της } \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\}$.

→ Η $\mathcal{T}'$ είναι τοπολογία στον X (απλό), και περιέχει τη $\mathcal{C}$. Άρα, περιέχει και την $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$. Δηλ: $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$.

→ Από την άλλη πλευρά, η $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$ περιέχει τη $\mathcal{C}$, άρα και όλες τις πεπερασμένες τομές στοιχείων της. Δηλ., $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$.

Επομένως, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$! $\blacksquare$

- Ορίζουμε ως περιοχή του $x \in X$ κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ με $x \in \mathcal{U}$.

  Συμβολίζουμε: $\mathcal{N}_x := \{\text{περιοχές του } x\}$.

- Μια $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ λέγεται βάση περιοχών του x αν:

  $\forall$ περιοχή $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_x$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}_x$ με $V \subseteq \mathcal{U}$.

• Έστω ότι $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{C})$ και η $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ όπως παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{N}_x$ είναι βάση περιοχών του x.

[Αποδ: Κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, και κάποιο από αυτά τα στοιχεία θα περιέχει το x.]

• Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι.

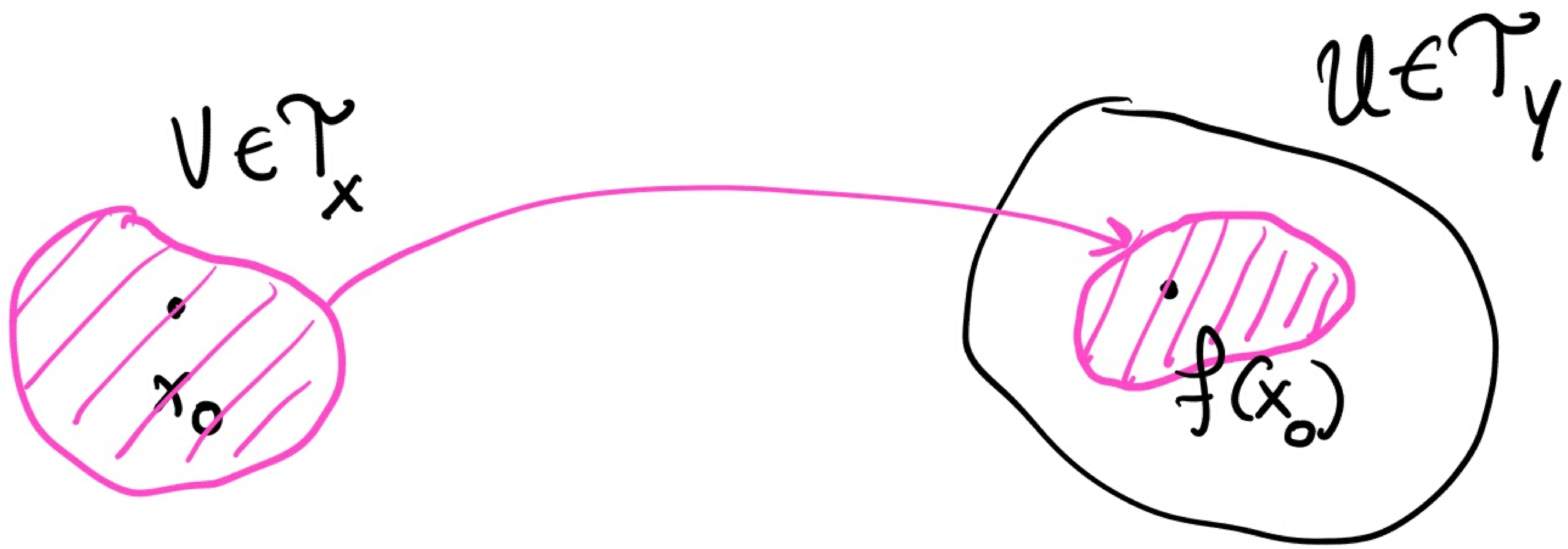
Λέμε ότι μία $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι <u>συνεχής</u> αν:

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \quad , \quad \forall \, U \in \mathcal{T}_Y$$

(δηλ., αν αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά).

Λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής στο $x_0 \in X$</u> αν:

$$\forall\, U \in \mathcal{N}_{f(x_0)}, \quad \exists\, V \in \mathcal{N}_{x_0} : \quad f(V) \subseteq U.$$



→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι, και $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$. Τότε:

$$f \text{ συνεχής} \Longleftrightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0, \ \forall x_0 \in X.$$

<u>Απόδ</u>: Απλή άσκηση.