Τώρα ορίζουμε τοπολογίες που γενικεύουν τις w, w^*:

→ Η ασθενής τοπολογία που παράγεται από μια οικογένεια ημινορμών.

Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και έστω $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ορίζουμε

$\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$:= η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε κάθε $p \in \mathcal{P}$ να είναι συνεχής : $(X,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ <u>και</u> $\mathcal{U}_{x_0} = x_0 + \mathcal{U}_0$, $\forall x_0 \in X$.

απλά $=$ η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει τα σύνολα

$x_0 + p^{-1}(U)$, $\forall x_0 \in X$, $\forall p \in \mathcal{P}$, $\forall U$ ανοιχτό $\subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Η $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ ονομάζεται η ασθενής τοπολογία στον X που παράγεται από την $\mathcal{P}$

$\forall (X, \|\cdot\|)$:

- $(X, w) = (X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, όπου $\mathcal{P} = \{ |x^*| : x^* \in X^* \}$.
- $(X^*, w^*) = (X^*, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, όπου $\mathcal{P} = \{ |f_x| : x \in X \}$.

→ Παρατήρηση:

① $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0, \quad \forall x_0 \in X.$

② Η οικογένεια

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}\big(B(0,\varepsilon)\big) : n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} : \text{———} // \text{———} \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Άρα, από το ①, η

$$\mathcal{B}_{x_0} := x_0 + \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N},\ p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P},\ \varepsilon > 0 \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

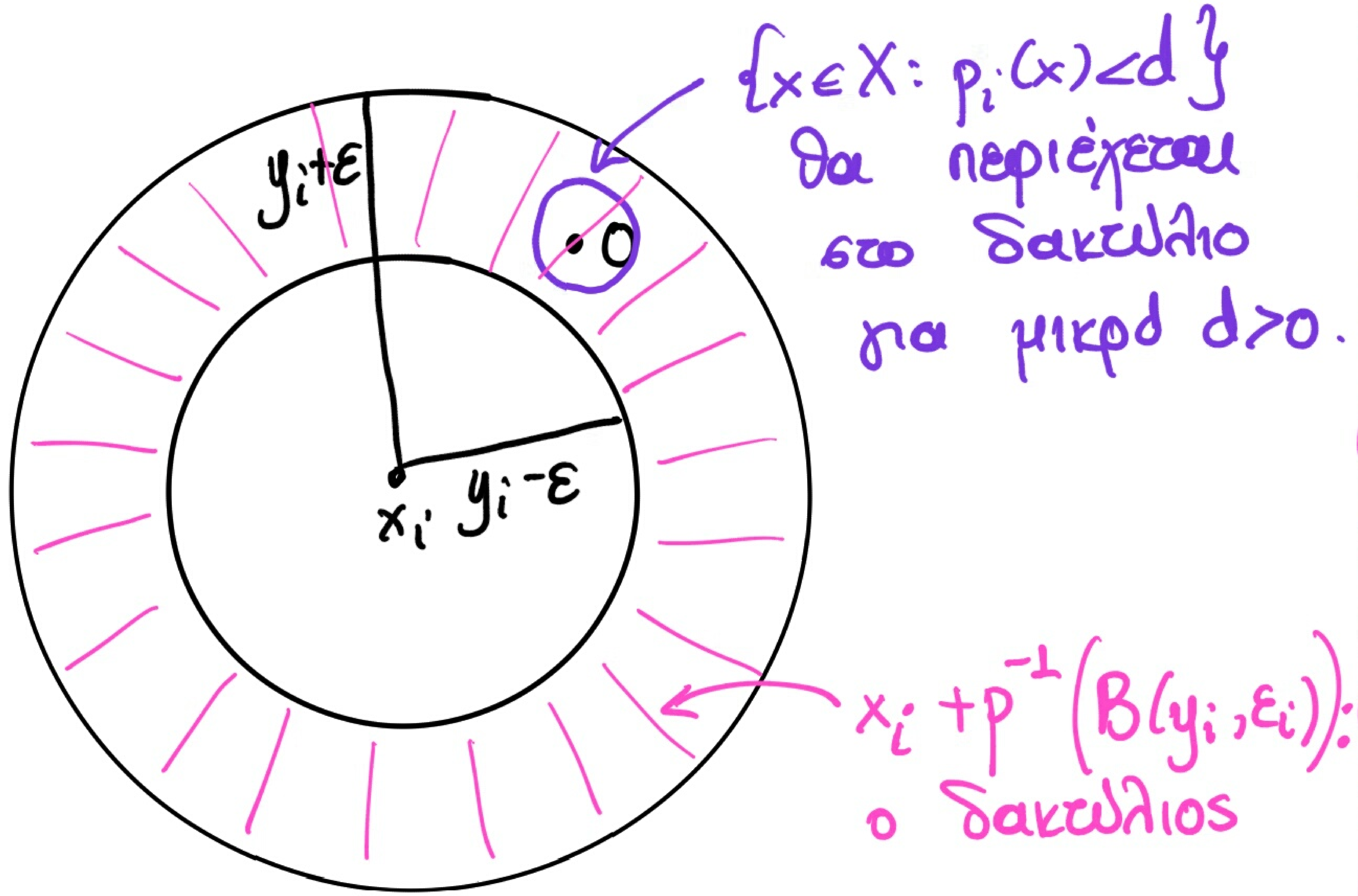
Αποδ: (2): Αρκεί να δειχθεί ο ισχυρισμός για τη $\mathcal{B}_0$.

Έστω $U \in \mathcal{N}_0$. Αφού η $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει τα $x_0 + p^{-1}(U)$: $x_0 \in X$, $p \in \mathcal{P}$, U ανοιχτό $\subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$, η οικογένεια

$$\mathcal{C} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} (x_i + p_i^{-1}(U_i)) : n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in X,\ U_1, \dots, U_n \text{ ανοιχτά } \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|) \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathcal{T}_\mathcal{P}$. Άρα, $\exists$ $V = \bigcap_{i=1}^{n} \left[x_i + p_i^{-1}(B(y_i, \varepsilon_i))\right]$ με $0 \in V \subseteq U$. Άρα, $\forall i = 1, \dots, n$: $0 \in x_i + p_i^{-1}(B(y_i, \varepsilon_i))$

$$\Longrightarrow \underset{p_i(x_i)}{\overset{\shortparallel}{p_i(-x_i)}} \in B(y_i, \varepsilon_i), \text{ δηλ. } y_i - \varepsilon \underset{\neq}{<} p_i(x_i) \underset{\neq}{<} y_i + \varepsilon.$$



Ιδέα: Φανταζόμαστε την $p_i(x_i)$ σαν μια "απόσταση" του x_i από το 0. Η απόσταση είναι μεταξύ $y_i-\varepsilon_i$ και $y_i+\varepsilon_i$, άρα το 0 ζει σε ένα "δακτύλιο" με κέντρο x_i και αυτές τις ακτίνες.

$\exists\, d>0$ ώστε $A_d := \{x\in X : p_i(x)<d\} \subseteq x_i + p_i^{-1}\big(B(y_i,\varepsilon_i)\big)$. Πράγματι:

$\forall x\in A_d$, $x = x_i + (x-x_i)$, όπου $p(x-x_i) \le p(x)+p(x_i) < p_i(x_i)+d$

$< y_i+\varepsilon$ για $d>0$ μικρό,

και $p(x-x_i) \geq p(x_i) - \underbrace{p(x)}_{<d} > p(x_i) - d > y_i - \varepsilon_i$ για $d>0$ μικρό.

Άρα, $$0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \in X : p_i(x) < d\}}_{A_d\ ,\ \in \mathcal{T}_p} \subseteq V \subseteq \mathcal{U},$$

για κατάλληλα μικρό $d>0$. ∎

⚠ Θα δείξουμε τελικά ότι οι τοπολογίες με βάσεις περιοχών τις $\mathcal{B}_x$, $\forall x \in X$, είναι ακριβώς αυτές που κάνουν τον X τοπικά κυρτό (δηλ., αυτές για τις οποίες ο X έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα).

⚠ Σε ένα $X \neq \emptyset$, μια επιλογή βάσης περιοχών $\tilde{\mathcal{B}}_x$ για κάθε $x \in X$ ορίζει $\boxed{\text{μοναδική}}$ τοπολογία στον X.

Με άλλα λόγια, $\exists !$ τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε η $\tilde{\mathcal{B}}_x$ να είναι βάση περιοχών του x, $\forall x \in X$.

<u>Απόδ:</u> Έστω T_1, T_2 τοπολογίες στον X ώστε η $\tilde{\mathcal{B}}_x$ να είναι βάση περιοχών του x, $\forall x \in X$, <u>και</u> στην T_1 <u>και</u> στην T_2.

Τότε, $T_1 = T_2$:

- $T_1 \subseteq T_2$: Έστω $U \in T_1$. Τότε,

$$\forall x \in U, \quad \exists \quad V_x \in T_1 \quad \text{με: } x \in V_x \text{ και } V_x \subseteq U.$$

Αφού $\tilde{\mathcal{B}}_x$ βάση περιοχών του x στην T_1, $\exists$ $W_x \in \tilde{\mathcal{B}}_x$ με $W_x \subseteq V_x$. Όμως, $W_x \in T_2$. Άρα:

$$\forall x \in U, \quad \exists \quad W_x \in T_2 \quad \text{με: } x \in W_x \text{ και } W_x \subseteq U.$$

Άρα, $U \in T_2$.

- $T_2 \subseteq T_1$: Παρόμοια.

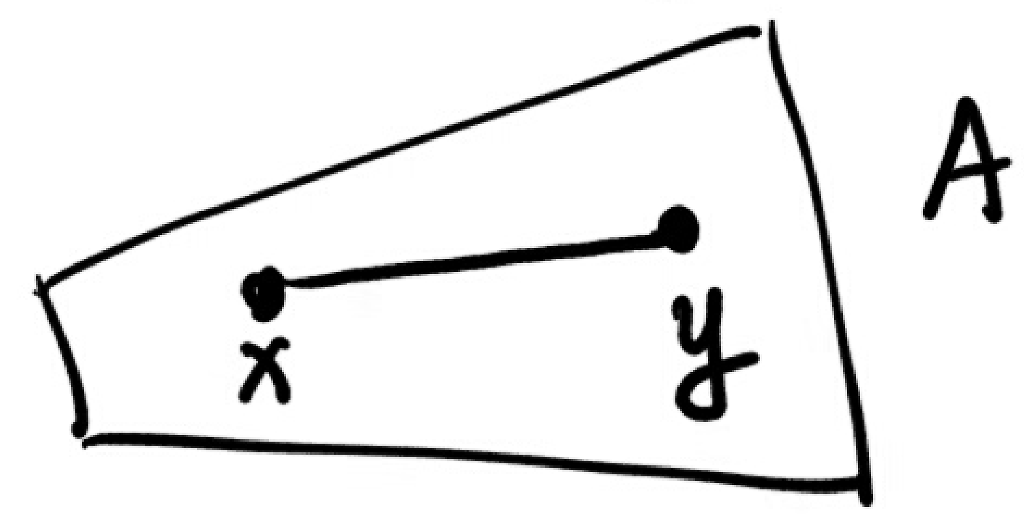
∎

⚠ Αυτό σημαίνει ότι η T_ρ θα μπορούσε να είχε οριστεί ως η (μοναδική) τοπολογία στον X με βάση περιοχών την παραπάνω $\mathcal{B}_{x_0}$, $\forall x_0 \in X$.

Ξεκινάμε βλέποντας ότι το <u>σχήμα</u> κάποιων συνόλων (σε τυχαίο διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) σχετίζεται με ημινόρμες.

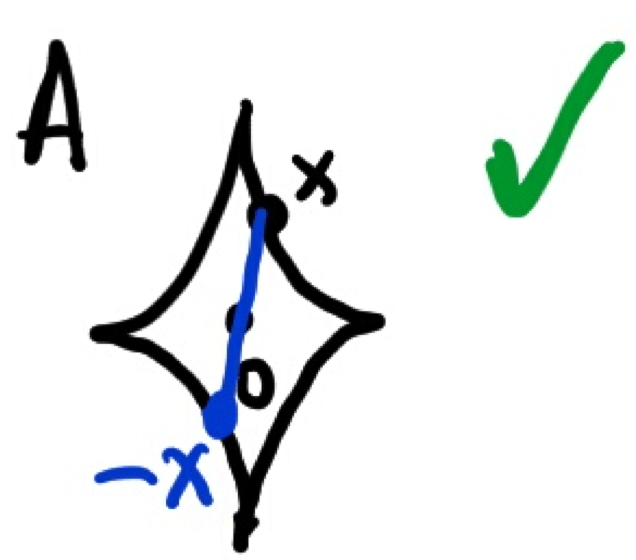
→ **Ορισμός:** Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.
Έστω $A\subseteq X$. Το A λέγεται:

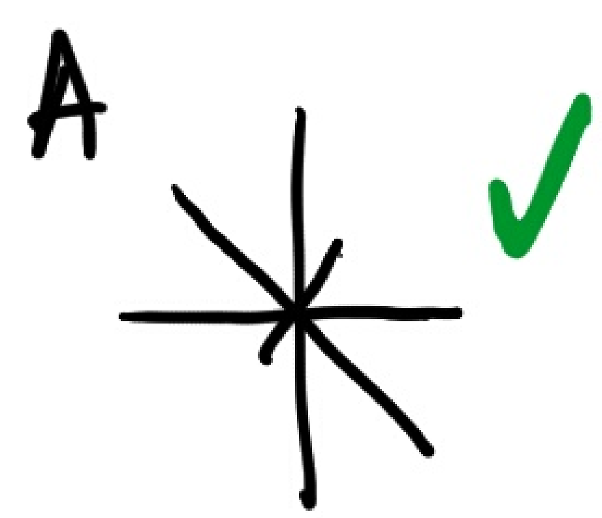
- **κυρτό** αν: $\forall\, x,y\in A$ και $\forall\, t\in(0,1)$, το $tx+(1-t)y\in A$.

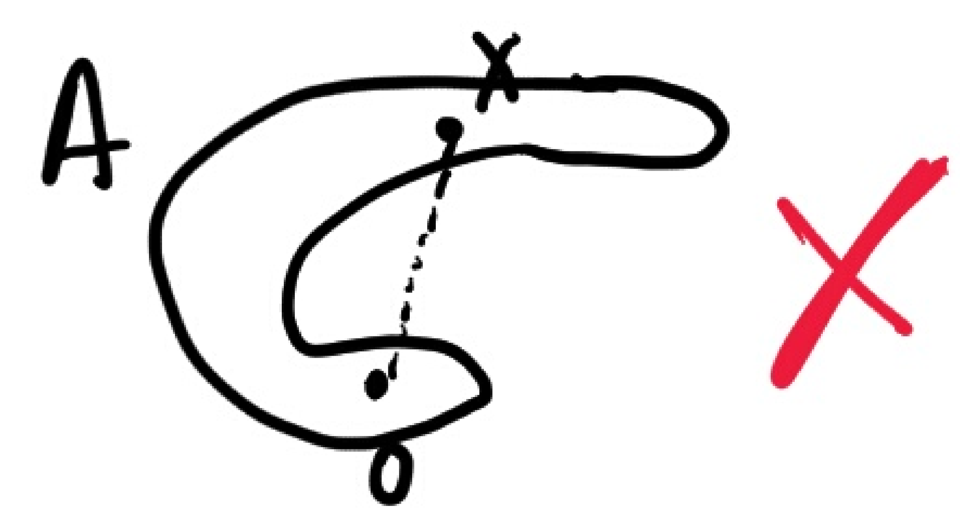


- **ισορροπημένο** αν: $\forall\, x\in A$ και $\forall\, \lambda\in\mathbb{K}$ με $|\lambda|\leq 1$, το $\lambda x\in A$.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

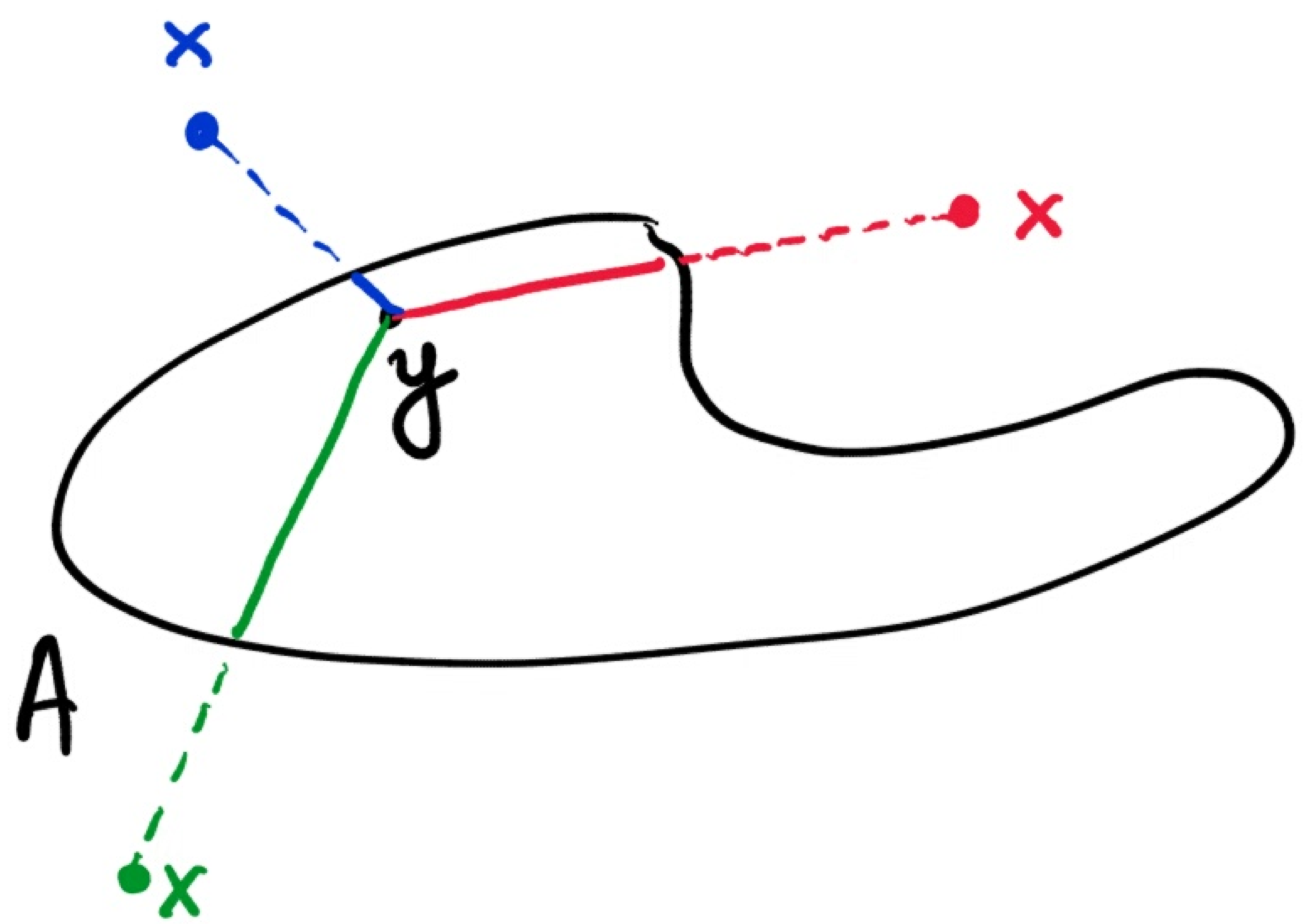






⚠ A ισορροπημένο $\Longrightarrow \begin{cases} 0 \in A \\ A = -A, \text{ δηλ. } A \text{ συμμετρικό.} \end{cases}$

- απορροφούν στο $y \in A$ αν: $\forall x \in X, \ \exists\, \varepsilon_x > 0 : \ y + tx \in A \ \ \forall t \in [0, \varepsilon_x).$



Δηλ., υπάρχει χώρος μέσα στο A γύρω από το y, προς <u>κάθε</u> κατεύθυνση.

→ $\boxed{\text{Το συναρτησοειδές του Minkowski}}$:

Οι παρακάτω προτάσεις $\boxed{\text{χαρακτηρίζουν}}$ τα κυρτά, ισορροπημένα και (παντού) απορροφούντα σύνολα ως τις ανοιχτές, μοναδιαίες μπάλες (με κέντρο το 0) ημινορμών.

→ Λήμμα: (οι ανοιχτές μοναδιαίες μπάλες ημινορμών είναι κυρτές, ισορροπημένες και (παντού) απορροφούσες): Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $p: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ημινόρμα στον X. Τότε, το

$$A := \{x \in X : p(x) < 1\}$$

είναι κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.

<u>Αποδ</u>: • A <u>κυρτό</u>: Έστω $x, y \in A$ και $t \in (0,1)$. Τότε,

$$p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = t\underbrace{p(x)}_{<1} + (1-t)\underbrace{p(y)}_{<1} < t + (1-t) = 1.$$

Άρα, $tx + (1-t)y \in A$.

• A <u>ισορροπημένο</u>: Έστω $x \in A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \leq 1$. Τότε,

$p(\lambda x) = |\lambda| \cdot \underbrace{p(x)}_{<1} < |\lambda| \leq 1$. Άρα, $\lambda x \in A$.

• A <u>απορροφούν σε κάθε σημείο του</u>: Έστω $y \in A$. Το A είναι απορροφούν στο y: Έστω $x \in X$. $\forall t > 0$,

$$p(y + tx) \leq \underbrace{p(y)}_{\lneq 1} + t p(x) \lneq 1, \quad \forall t < \boxed{\frac{1 - p(y)}{p(x) + 1}} \;{}^{\prime\prime}\, \varepsilon_x > 0.$$

Άρα, $y+tx \in A \quad \forall\, t\in[0,\varepsilon_x)$. $\blacksquare$

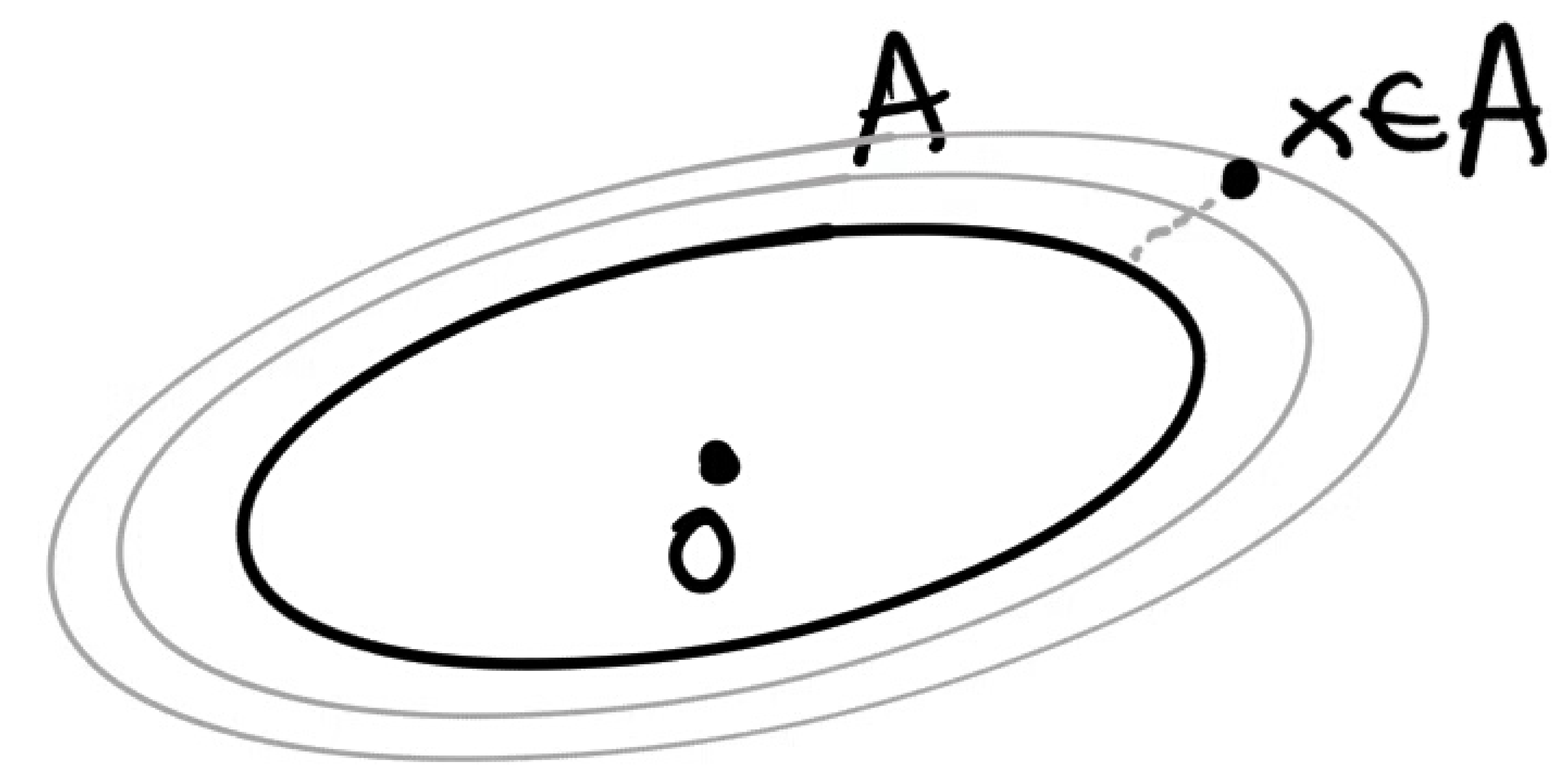
Τώρα θα δούμε ότι ισχύει και το <u>αντίστροφο</u>.

→ Πρόταση και ορισμός (κάθε κυρτό, ισορροπημένο και (παντού) απορροφούν σύνολο είναι η ανοιχτή μοναδιαία μπάλα (με κέντρο 0) κάποιας μοναδικής ημινόρμας):

Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω $A\subseteq X$ κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.

Τότε, υπάρχει <u>μοναδική</u> ημινόρμα $p_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ώστε

$$A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}.$$



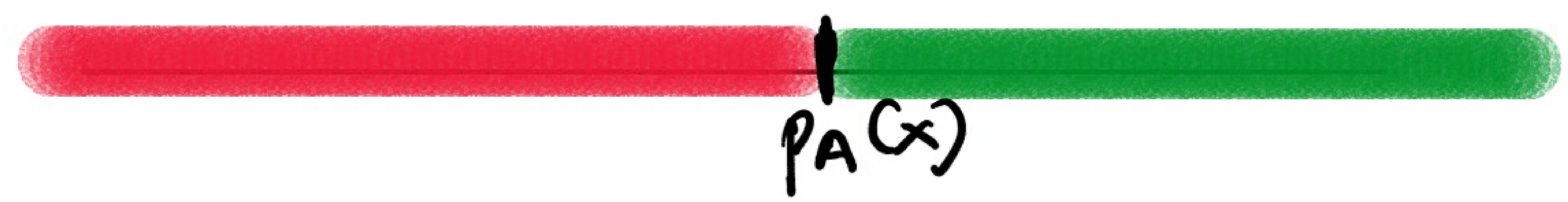
Μάλιστα, η p_A έχει τύπο:

$$p_A(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}$$

και λέγεται το συναρτησοειδές του Minkowski του A.

Μας λέει πόσο πρέπει να μεγενθύνουμε το A για να περιέχει το x (αν $x \notin A$), ή πόσο μπορούμε να σμικρύνουμε το A ώστε το x ακόμα να περιέχεται στη σμίκρυνση.

⚠ Έστω $x \in X$. Παρατηρούμε ότι
$$\left.\begin{aligned} &x \in tA \quad \forall\, t > p_A(x), \\ \text{και} \quad &x \notin tA \quad \forall\, t < p_A(x) \end{aligned}\right\}.$$



Πράγματι:

- $p_A(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}$. Έστω $t > p_A(x)$. $\exists\, p_A(x) \leq t_0 < t \;:\; x \in t_0 A$

A ισορρ.

$\Rightarrow t_0 A$ ισορρ. $\Rightarrow \quad \lambda x \in t_0 A \quad \forall\, |\lambda| \leq 1$, άρα $x \in \frac{t_0}{\lambda} \cdot A \quad \forall\, |\lambda| \leq 1$.

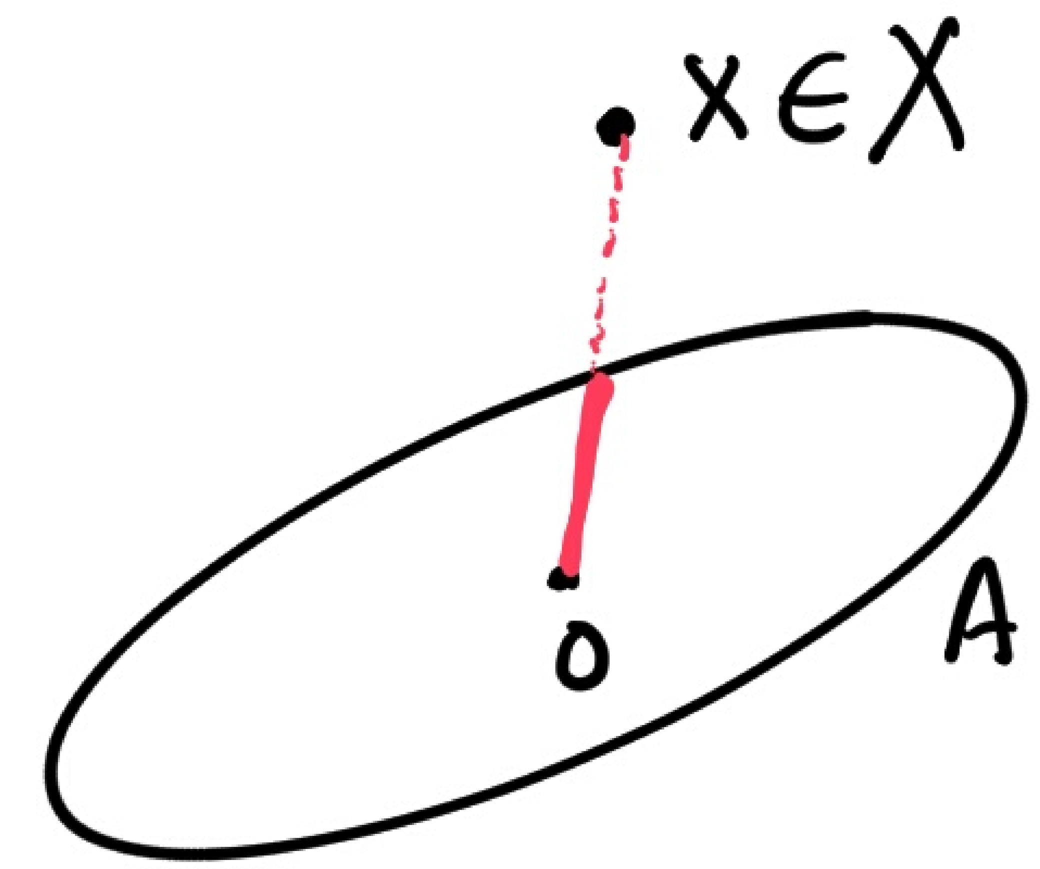
ο τυχαίος $\rho \geq t_0$

Επιλέγοντας $\lambda = \frac{t_0}{t}$ $\left(\left|\frac{t_0}{t}\right| < 1\right)$, παίρνουμε : $x \in tA$.

- Έστω $t < p_A(x)$. Εξ ορισμού του $p_A(x)$, $x \notin tA$.

Απόδ: • Η συνάρτηση $p_A : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι καλά ορισμένη,

δηλ. : $\forall x \in X$, το $p_A(x) \in [0,+\infty)$:



Έστω $x \in X$. Το A είναι απορροφούν

στο 0, άρα $\exists\ \varepsilon>0 :\ \varepsilon x \in A$

$\Longrightarrow x \in \frac{1}{\varepsilon} \cdot A$

$\longrightarrow p_A(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} < +\infty$.

• Το p_A είναι ημινόρμα:

⇝ Έστω $x, y \in X$. ΘΔΟ : $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

Αρκεί ΝΔΟ: $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$. ΘΔΟ $\boxed{x+y \in \left(p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon\right)\cdot A.}$

Πράγματι, $p_A(x)+\varepsilon > p_A(x) \longrightarrow x \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A.$

$p_A(y)+\varepsilon > p_A(y) \longrightarrow y \in \left(p_A(y)+\varepsilon\right)\cdot A$ $\Bigg\}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x+y \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A + \left(p_A(y)+\varepsilon\right)\cdot A \overset{!}{=} \left(p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon\right)\cdot A$$

A κυρτό!

Πράγματι, το ότι το A είναι κυρτό σημαίνει ότι

$\boxed{tA+sA = (t+s)A \quad \forall\ t,s>0}$:

- Αν $x,y\in A$, τότε $tx+sy = (t+s)\underbrace{\left(\frac{t}{t+s}x+\frac{s}{t+s}y\right)}_{\in A\ (\text{κυρτό})} \in (t+s)A$, άρα $tA + sA \subseteq (t+s)A$.

- Αν $x \in A$, τότε $(t+s)x = tx + sx \in tA + sA$,

  άρα $(t+s)A \subseteq tA + sA$. $\lrcorner$

Αφού δείξαμε ότι $x+y \in \big(p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon\big) \cdot A$,

έχουμε ότι $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$, όπως επιθυμούσαμε.