άρα $tA+sA \subseteq (t+s)A$.

- Αν $x \in A$, τότε $(t+s)x = tx+sx \in tA+sA$,

  άρα $(t+s)A \subseteq tA+sA$. $\lrcorner$

Αφού δείξαμε ότι $x+y \in \left(p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon\right)\cdot A$,

έχουμε ότι $p_A(x+y) \leq p_A(x)+p_A(y)+2\varepsilon$, όπως επιθυμούσαμε.

$\rightsquigarrow$ Έστω $x \in X$. Για ΝΔΟ $p_A(x) = |\lambda|\cdot p_A(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

αρκεί ΝΔΟ $p_A(\lambda x) \leq |\lambda|\cdot p_A(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$. $\forall \varepsilon > 0$, $x \in \left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A$

$\longrightarrow$ $\lambda x \in \lambda\left(p_A(x)+\varepsilon\right)\cdot A =$

$$= \quad |\lambda| \cdot (p_A(x)+\varepsilon)\cdot A.$$

A ισορροπημένο

Άρα, $p_A(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot (p_A(x)+\varepsilon), \quad \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow \quad p_A(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot p_A(x).$

- $A = \{x\in X : p_A(x)<1\}$:
  - $\boxed{\supseteq}$: Έστω $x\in X$ με $p_A(x)<1$. Αφού το 1 είναι <u>μεγαλύτερο</u> του $p_A(x)$, έχουμε ότι το $x\in 1\cdot A$, δηλ. ότι $x\in A$.
  - $\boxed{\subseteq}$: Έστω $x\in A$.

Το A είναι ισορροπημένο, άρα υπάρχει "χώρος κίνησης", μέσα στο A, ξεκινώντας από το x και προς κατεύθυνση x: $\exists\ \varepsilon_x > 0 :\quad x + tx \in A, \ \forall\, t \in [0, \varepsilon_x)$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{\varepsilon_x}{2} \cdot x \in A$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \cdot x \in A$$

$$\Rightarrow \quad x \in \underbrace{\boxed{\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_x}{2}}}}_{<1} \cdot A$$

$$\Rightarrow \quad p_A(x) < 1 .$$

• Έστω $q: X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ημινόρμα με $A = \{x \in X : q(x) < 1\}$.

Τότε, $\boxed{q = p_A}$:

$\rightsquigarrow$ $\forall\, x \in X$ με $q(x) \neq 0$, έχουμε $q\left(\frac{x}{q(x)}\right) = \frac{1}{q(x)} \cdot q(x) = 1$

$$\xrightarrow[A=\{x\in X:\, q(x)<1\}]{} \frac{x}{q(x)} \notin A \xrightarrow[A=\{x\in X:\, p_A(x)<1\}]{} \underbrace{p_A\left(\frac{x}{q(x)}\right)}_{\frac{1}{q(x)} p_A(x)} \geq 1$$

$\Longrightarrow$ $p_A(x) \geq q(x)$ (άρα και $p_A(x) \neq 0$ επίσης).

$\rightsquigarrow$ Παρόμοια, $\forall\, x \in X$ με $p_A(x) \neq 0$, έχουμε $q(x) \geq p(x)$

(άρα και $q(x) \neq 0$).

Επομένως, έστω $x \in X$.

- Αν τα $p_A(x), q_A(x)$ είναι και τα δύο 0, τότε $p_A(x) = q_A(x) (=0)$.
- Αν κάποιο από τα $p_A(x), q_A(x)$ είναι $\neq 0$, τότε είναι και το άλλο, άρα από τα παραπάνω:

$$\left.\begin{array}{r} p_A(x) \geq q(x) \\ \text{και} \quad q(x) \geq p_A(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_A(x) = q(x)$.

$\blacksquare$

Θα δούμε σταδιακά ότι, σε ένα διανυσματικό χώρο, οποιαδήποτε τοπολογία που παράγεται από ημινόρμες κάνει το χώρο τοπολογικό γραμμικό και, ακόμα καλύτερα, τοπικά κυρτό.

Ξεκινάμε με μία γενική μελέτη της πρώτης κατηγορίας χώρων.

→ $\boxed{\text{Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι}}$: → Τους σκεφτόμαστε σα γενίκευση του $\mathbb{R}^d$, και γενικότερα χώρων με νόρμα

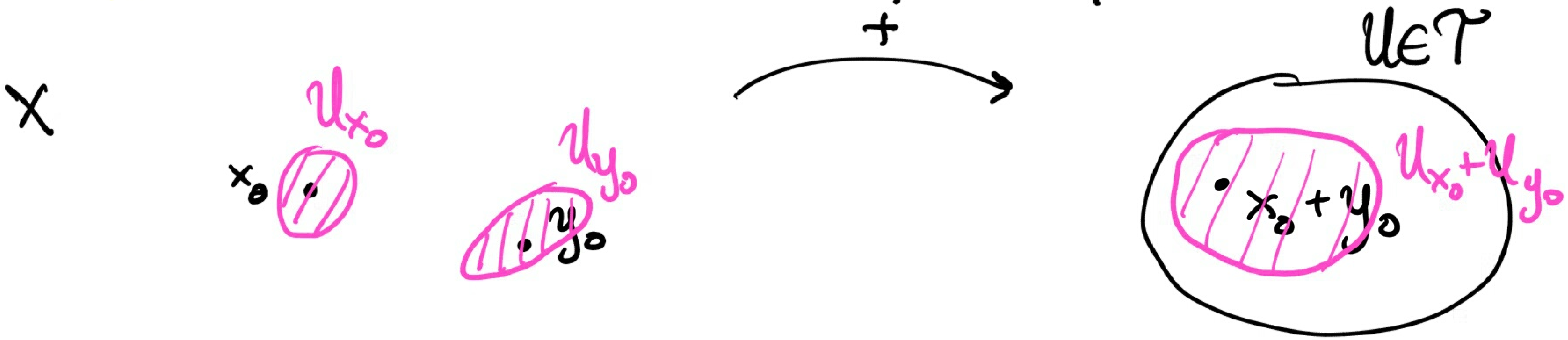
→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός γραμμικός χώρος (τγχ) αν:

(i) $\forall x \in X$, το $\{x\}$ είναι κλειστό (ως προς την $\mathcal{T}$), και

(ii) Οι πράξεις $+ : X \times X \to X$, $(x,y) \to x+y$, $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \to \lambda x$, με είναι συνεχείς.

⚠ Ο $X \times X$ εφοδιάζεται με τη μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, και ο $\mathbb{K} \times X$ με την $\mathcal{T}_{|\cdot|} \times \mathcal{T}$. Έτσι:

→ $+ : X \times X \to X$ συνεχής σημαίνει ότι:



$\forall\ x_0, y_0 \in X$, $\quad \forall\ U \in \mathcal{T}$ με $x_0 + y_0 \in U$,

$\exists\ \ U_{x_0} \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U_{x_0}$
$\quad\ \ U_{y_0} \in \mathcal{T}$ με $y_0 \in U_{y_0}$. ώστε $U_{x_0} + U_{y_0} \subseteq U$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $x_0 = y_0 = 0 \in X$, παίρνουμε ότι:

$\forall$ $\mathcal{U}$ περιοχή του 0 (στην $\mathcal{T}$), υπάρχουν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ περιοχές του 0 ώστε $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Θέτοντας $V := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$,

$(0 \in V \in \mathcal{T})$

προκύπτει ότι:

$$\boxed{\forall\ \mathcal{U} \text{ περιοχή του } 0,\ \exists\ V \text{ περιοχή του } 0 \text{ ώστε: } V + V \subseteq \mathcal{U}.}$$

Αυτό δείχνει ότι οι περιοχές του 0 έχουν κάποια πολυπλοκότητα (δεν είναι τετριμμένες – έχουν κάποια προσθετική δομή).

$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ συνεχής σημαίνει ότι:

$\forall\ \mathcal{U}$ περιοχή του $\lambda_0 x_0$, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και V περιοχή του 0 ώστε:

$$\lambda V \subseteq \mathcal{U}, \quad \forall \lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$$

στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$

↳ Αν "πειράξω λίγο" το λ_0 και το x_0, παραμένω στη $\mathcal{U}$

Αφού οι πράξεις + και επί είναι συνεχείς ως προς 2 μεταβλητές, παραμένουν συνεχείς αν σταθεροποιηθεί μια μεταβλητή τους. Δηλαδή, κάθε μεταφορά και κάθε διαστολή / συστολή είναι συνεχής συνάρτηση.

→ Πόρισμα: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε:

(i) $\forall y \in X$, η
$$\tau_y : X \to X, \quad x \to x+y \quad \forall x \in X$$

είναι ομοιομορφισμός (δηλ. 1-1, επί, συνεχής, τ_y^{-1} συνεχής).

Άρα: $\mathcal{U} \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow x_0 + \mathcal{U} \in \mathcal{T}, \ \forall x_0 \in X.$

(ii) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, η $\sigma_\lambda : X \longrightarrow X$

$x \longrightarrow \lambda x \quad \forall x \in X$

είναι ομοιομορφισμός.

Άρα: $U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \lambda U \in \mathcal{T}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$\longrightarrow$ Πόρισμα: Σε κάθε τοπολογικό γραμμικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, ισχύει ότι

$$\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0 \ , \forall x_0 \in X.$$

Άρα, η τοπολογία του X προσδιορίζεται πλήρως από την οικογένεια περιοχών του 0.

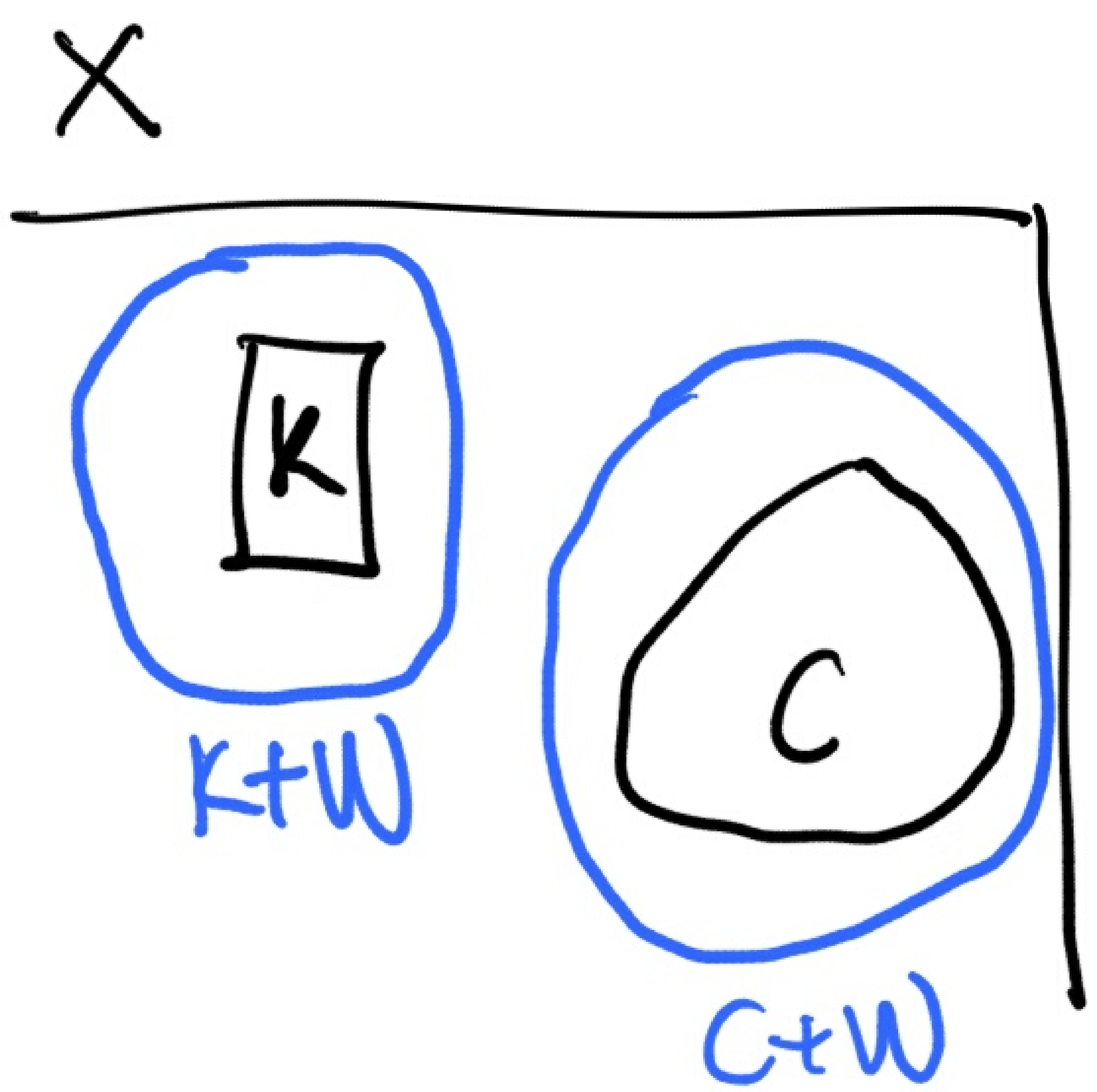
Σε κάθε τγχ $(X,\mathcal{T})$, τα ανοιχτά σύνολα έχουν αρκετή "πολυπλοκότητα":

→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $(X,\mathcal{T})$ τγχ και $K\subseteq X$ συμπαγές, $C\subseteq X$ κλειστό.

Τότε, υπάρχουν ανοιχτά $(\in\mathcal{T})$ $U\supseteq K$, $V\supseteq C$, ώστε $U\cap V=\emptyset$.

Ακόμη καλύτερα: υπάρχει $W\in\mathcal{N}_0$ ώστε

$$(K+W)\cap(C+W)=\emptyset.$$



<u>Απόδ</u>: <u>Βήμα 1</u>: $\forall$ περιοχή V του 0, $\forall n\in\mathbb{N}$, υπάρχει <u>συμμετρική</u> περιοχή U του 0 ώστε:

$$\underbrace{U+U+\cdots+U}_{n \text{ φορές}}\subseteq V.$$

Πράγματι: ⊙ <u>Για $n=2$:</u> Έχουμε δει, λόγω της συνέχειας της $+$, ότι υπάρχει $\tilde{U}$ περιοχή του 0 ώστε $\tilde{U}+\tilde{U} \subseteq V$.

Η $-\tilde{U} \in \mathcal{N}_0$ επίσης (λόγω της συνέχειας του $\cdot$), άρα η $U := \tilde{U} \cap (-\tilde{U}) \in \mathcal{N}_0$. και

$$U + U \subseteq \tilde{U} + \tilde{U} \subseteq W.$$

⊙ Επαγωγικά, $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $U_k \in \mathcal{N}_0$, συμμετρική, ώστε

$$\underbrace{U_k + U_k + \dots + U_k}_{2^k \text{ φορές}} \subseteq V.$$

Άρα, και για κάθε $n \leq 2^k$,

$$\underbrace{U_k + \dots + U_k}_{n \text{ φορές}} \underset{0 \in U_k}{\subseteq} \underbrace{U_k + \dots + U_k}_{2^k \text{ φορές}} \subseteq V.$$

<u>Βήμα 2:</u> $\forall x \in K$, το $x \notin C \Rightarrow x \in X \setminus C \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow$ η $X \setminus C - x \in \mathcal{N}_0$. Άρα:

$\exists$ U_x συμμετρική περιοχή του 0 ώστε

$$U_x + U_x + U_x \subseteq X \setminus C - x,$$

δηλ. $$x + U_x + U_x + U_x \subseteq X \setminus C$$

δηλ. $(x + U_x + U_x + U_x) \cap C = \emptyset$,

δηλ. $\boxed{(x + U_x + U_x) \cap \underbrace{(C - U_x)}_{\substack{\parallel \\ C + U_x}} = \emptyset.}$

$\underbrace{K}_{\text{συμπαγές}} \subseteq \bigcup_{x \in K} (x + U_x) \longrightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in K$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i}).$$

Ορίζουμε $W := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i} \in \mathcal{N}_0$,

n ⊛ $\Longrightarrow \left[(x_i + U_{x_i}) + W \right] \cap (C + W) = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n,$

και άρα

$$\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U_{x_i})\right]+W\right)\cap\left(C+W\right)=\emptyset.$$

Επομένως, $(K+W)\cap(C+W)=\emptyset.$ ■

→ Πόρισμα 1: Κάθε τχχ $(X,\mathcal{T})$ είναι χώρος Hausdorff. Μάλιστα, $\forall\ x\neq y$ στον X, υπάρχει περιοχή U του 0 με $(x+U)\cap(y+U)=\emptyset$.

→ **Πόρισμα 2:** Έστω $(X,\mathcal{T})$ τγχ. Για κάθε V περιοχή του 0, υπάρχει περιοχή W του 0 ώστε

$$\overline{W} \subseteq V.$$

Απόδ.:

$$\left.\begin{array}{l} \{0\} \text{ συμπαγές,} \\ X\setminus V \text{ κλειστό} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ W \text{ περιοχή του } 0$$

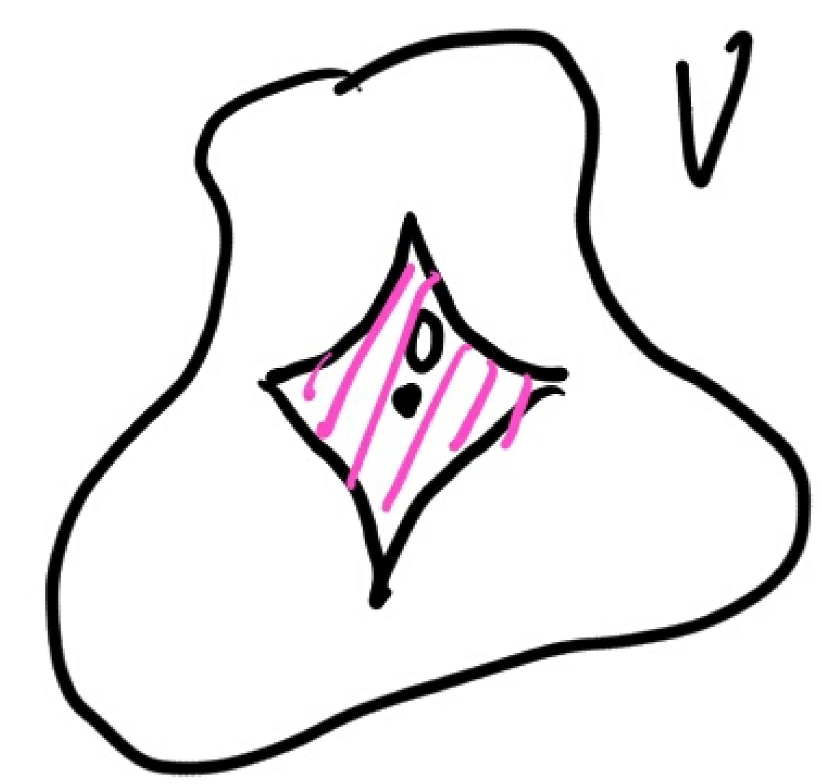
ώστε $(0+W)\cap(X\setminus V + W) = \emptyset$,

δηλ. $W \subseteq \underbrace{X\setminus \underbrace{(X\setminus V + W)}_{\text{ανοιχτό},\ \supseteq X\setminus V}}_{\text{κλειστό},\ \subseteq V}$.

Άρα, $\overline{W} \subseteq X \setminus (X \setminus V + W) \subseteq V.$

∎

→ **Πρόταση:** Έστω $(X, \mathcal{T})$ τ.χ. Τότε, κάθε περιοχή του 0 περιέχει ισορροπημένη περιοχή του 0.



Απόδ.: