→ **Ασθενείς τοπολογίες : οι (X, w), (X^*, w^*).**

Επανερχόμαστε σε αυτούς τους χώρους για να τους καταλάβουμε καλύτερα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία που αναπτύξαμε για τοπικά κυρτούς χώρους γενικότερα.

<u>Υπενθύμιση</u>: Σύγκλιση δικτύων σε τυχαίο τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$:

→ <u>Ορισμός</u>: Έστω ένα σύνολο (δεικτών) I, και $\leq$ μερική διάταξη στο I, δηλ.:

$$\left\{\begin{array}{l} a \leq a \quad \forall a \in I, \\ \text{αν } a \leq b \text{ και } b \leq a, \text{ τότε } a = b, \\ \text{αν } a \leq b \text{ και } b \leq c, \text{ τότε } a \leq c \end{array}\right\}$$

⊙ Λέμε ότι το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο αν:

$$\forall\, i,j \in I, \quad \exists\, k \in I \quad \text{με} \quad k \geq i \ \underline{\text{και}} \ k \geq j.$$

<u>π.χ.</u>: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$, $\forall$ σύνολο $X \neq \emptyset$.

⊙ Κάθε συνάρτηση $x : (I, \leq) \longrightarrow X$, όπου το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και $X \neq \emptyset$, λέγεται δίκτυο στον X.

<u>Συμβολίζουμε</u>: $x_i := x(i), \ \forall i \in I$

$$(x_i)_{i \in I} := x.$$

⊙ Έστω $(X,\mathcal{T})$ τχ. και $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X.

Λέμε ότι το $(x_i)_{i\in I}$ συγκλίνει στο $x_0\in X$ ως προς την $\mathcal{T}$,

και γράφουμε $x_i \longrightarrow x_0$ ή $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}} x_0$, αν:

$\forall\, \mathcal{U}$ περιοχή (στην $\mathcal{T}$ δηλαδή) του x_0, υπάρχει $i_0\in I$ ώστε: $x_i\in\mathcal{U}$ $\forall\, i\geq i_0$ στο I.

⚠ Αν ο $(X,\mathcal{T})$ είναι Hausdorff, δηλ. η $\mathcal{T}$ διαχωρίζει σημεία του X, τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει <u>μοναδικό</u> όριο.

Τέλος, υπενθυμίζουμε την αρχή της μεταφοράς σε τυχαίους τ.χ. :

→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{T}_Y)$, όπου $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι. Έστω $x_0\in X$. Τότε:

f συνεχής στο x_0

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall$ δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ στον X με $x_i\xrightarrow{\mathcal{T}_X}x_0$, ισχύει ότι

$$f(x_i)\xrightarrow{\mathcal{T}_Y}f(x_0).$$

! → $\boxed{(X,w)}$: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

- Ορίσαμε τη w-τοπολογία στον X ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X ώστε κάθε $x^* \in X^*$ να είναι συνεχής απεικόνιση : $(X,\mathcal{T}) \to (\mathbb{K},|\cdot|)$

  (δηλ., ως τη μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X που περιέχει τις $(x^*)^{-1}(U)$, $\forall\, U$ ανοιχτό $\subseteq (\mathbb{K},|\cdot|)$, $\forall x^* \in X^*$). Άρα:

  ⇝ $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$: Αν A w-ανοιχτό, τότε A $\|\cdot\|$-ανοιχτό (αφού η $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ περιέχει τις παραπάνω αντίστροφες εικόνες).

$\rightsquigarrow \; X^* \subseteq (X,w)^*$: Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής: $(X,w) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

• Έχουμε δει ότι, $\forall x_0 \in X$, $\mathcal{N}_{x_0} = x_0 + \mathcal{N}_0$, και ότι η

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}}_{=: B(x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)} : n \in \mathbb{N}, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0 \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Άρα, η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |\underbrace{x_i^*(x - x_0)}_{= x_i^*(x) - x_i^*(x_0)}| < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0 \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

Άρα, ο (X,w) είναι τοπικά κυρτός χώρος, με τοπολογία την ασθενή τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{P} := \{ |x^*| : x^* \in X^* \}$$

ημινορμών στον X.

⊙ $\boxed{(X,w)^* = X^*}$: Ήδη εξηγήσαμε ότι $X^* \subseteq (X,w)^*$: αυτό ήταν μέρος του ορισμού της w-τοπολογίας. Όμως, $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, άρα δεν μπορεί να αυξήθηκαν τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή περνώντας από την $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ στη μικρότερη $\mathcal{T}_w$. Πράγματι,

$(X,w)^* \subseteq X^*$, καθώς , $\forall$ γραμμική, συνεχή $f:(X,w) \to (\mathbb{K},|\cdot|)$

έχουμε ότι $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, $\forall\, \mathcal{U} \subseteq (\mathbb{K},|\cdot|)$ ανοιχτό,

και άρα $f:(X,\|\cdot\|) \to (\mathbb{K},|\cdot|)$ επίσης συνεχής.

⊙ Τι σημαίνει ασθενής σύγκλιση; Έστω $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X,

και $x_0 \in X$. Τότε:

! $$\boxed{x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)\ ,\ \forall x^* \in X^*.}$$

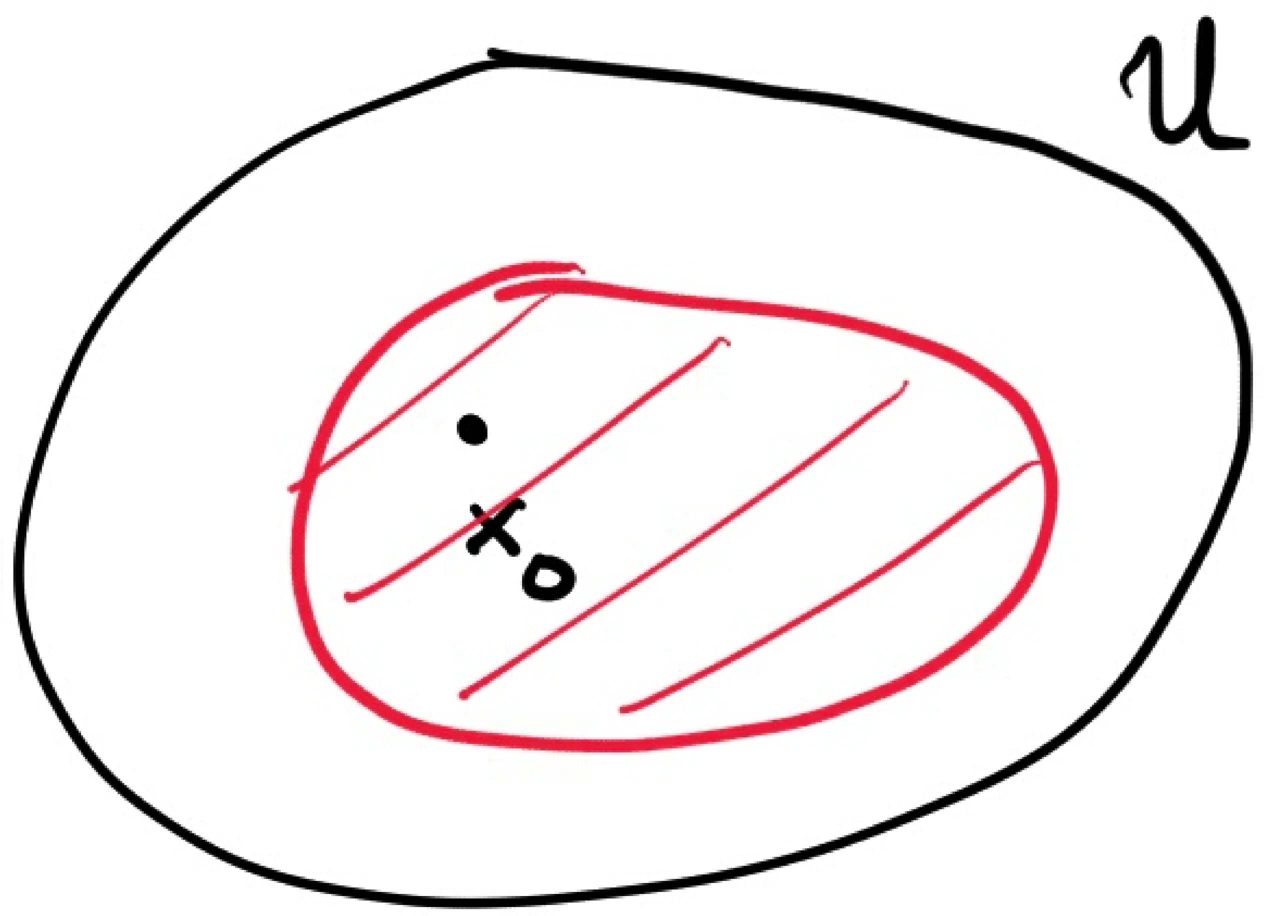
<u>Αποδ:</u> $(\Longrightarrow)$ Έστω $x^* \in X^*$. Τότε, $x^* : (X, w) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχής.

Άρα, $x_i \xrightarrow{w} x_0 \Longrightarrow x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$.

$(\Longleftarrow)$ Ξέρουμε ότι, $\forall x^* \in X^*$, $x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$.

ΘΔΟ $x_i \xrightarrow{w} x_0$. Έστω $\mathcal{U} \in \mathcal{N}_{x_0}$. Τότε, $\exists\, n \in \mathbb{N}$,

$x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:



η $V := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_j^*(x) - x_j^*(x_0)| < \varepsilon\}$

να είναι περιοχή του 0 <u>μέσα</u> στη $\mathcal{U}$.

Δηλ: $\forall x \in X$ με $\left.\begin{cases} |x_1^*(x) - x_1^*(x_0)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_n^*(x) - x_n^*(x_0)| < \varepsilon \end{cases}\right\}$, ισχύει: $x \in \mathcal{U}$.

$\forall \ j=1,\dots,n, \quad x_j^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x_j^*(x_0)$. Άρα, $\exists \ i_j \in I$ ώστε:

$\forall \ \kappa \in I$ με $\kappa \geq i_j$, να ισχύει ότι $|x_j^*(x_i) - x_j^*(x_0)| < \varepsilon$.

Επιλέγοντας $\kappa_0 \in I$ με $\kappa_0 \geq i_1, \kappa_0 \geq i_2, \dots, \kappa_0 \geq i_n$ (υπάρχει τέτοιο κ_0, αφού το I είναι κατευθυνόμενο), έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{c} |x_1^*(x_i) - x_1^*(x_0)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_n^*(x_i) - x_n^*(x_0)| < \varepsilon \end{array}\right\}, \quad \forall \ i \in I \text{ με } i \geq \kappa_0.$$

Άρα, $x_i \in \mathcal{U} \quad \forall \ i \geq \kappa_0$.

■

→ <u>Άσκηση:</u> Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R})$, για κάποιο $1\le p<+\infty$. Τι σημαίνει ότι $f_n \xrightarrow{w} f$, για κάποια $f\in L^p(\mathbb{R})$;

<u>Λύση:</u> Σημαίνει ότι $x^*(f_n) \xrightarrow{1.1} x^*(f)$, $\forall x^*\in \left(L^p(\mathbb{R})\right)^*$.

Ξέρουμε ότι $\left(L^p(\mathbb{R})\right)^* = L^q(\mathbb{R})$, όπου $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, και μάλιστα ότι τα $x^*\in\left(L^p(\mathbb{R})\right)^*$ είναι ακριβώς οι απεικονίσεις

$$T_g : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda,$$

πάνω σε όλες τις $g\in L^q(\mathbb{R})$. Επομένως,

$$f_n \xrightarrow{w} f \iff \boxed{\int f_n g \, d\lambda \to \int f g \, d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}).}$$

$\blacksquare$

$\rightarrow$ <u>Άσκηση</u>: ΝΔΟ $\chi_{[n,n+1]} \xrightarrow{w} 0$ στον $L^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 < p < +\infty$.

⊙ Πώς σχετίζονται η ασθενής κλειστότητα και η $\|\cdot\|$-κλειστότητα;

Έστω $A \subseteq X$. Ξέρουμε ότι:

$$\overline{A}^{w} := \bigcap_{\substack{F \text{ w-κλειστό}, \\ F \supseteq A}} F \ , \qquad \text{και}$$

$$\overline{A}^{\|\cdot\|} := \bigcap_{\substack{F \ \|\cdot\|\text{-κλειστό}, \\ F \supseteq A}} F \, .$$

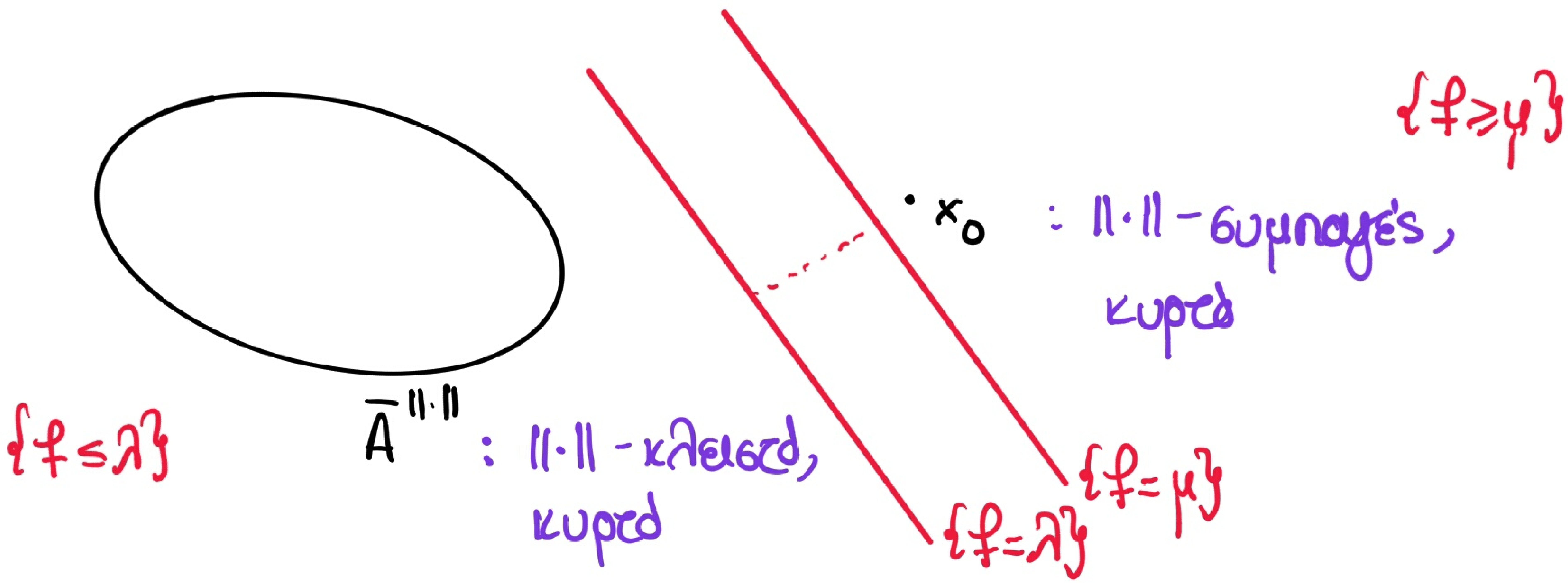
Αφού $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, υπάρχουν <u>λιγότερα</u> w-κλειστά από ότι $\|\cdot\|$-κλειστά, και άρα $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}$, $\forall A \subseteq X$. Όμως, έχουμε <u>ισότητα</u> αν A κυρτό!

→ <u>Θεώρημα</u> (Mazur): Αν A κυρτό $\subseteq X$ (όπου X διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$), τότε: $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}$.

(π.χ.: $\overline{B_X(0,1)}^{w} = \overline{B_X(0,1)}^{\|\cdot\|} = \tilde{B}_X(0,1)$).

<u>Απόδ.</u>: Ξέρουμε ότι $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}$. Έστω ότι $\exists\, x_0 \in \overline{A}^{w}$ με $x_0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}$.

$\underbrace{(X, \|\cdot\|)}_{\text{τοπικά κυρτός}}$



Ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι τοπικά κυρτός χώρος, καθώς η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι ημινόρμα που διαχωρίζει σημεία του x, και η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \Big\{ \underbrace{\{x\in X : \|x-x_0\| < \varepsilon\}}_{\substack{\shortparallel \\ B_{\|\cdot\|}(x_0,\varepsilon)}} : \varepsilon>0 \Big\}$$

είναι βάση περιοχών του x_0, $\forall x_0 \in X$.

Αφού το $\{x_0\}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, κυρτό $\subseteq X$,

και το $\overline{A}^{\|\cdot\|}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, κυρτό $\subseteq X$, υπάρχουν

καθώς A κυρτό

$x^* \in X^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$x^*(x_0) \geq \mu \quad \text{και} \quad x^*(x) \leq \lambda \quad \forall\, x \in \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

Ομως, $x_0 \in \overline{A}^{w} \Rightarrow \exists$ δίκτυο $(x_i)_{i\in I}$ στο A με $x_i \xrightarrow{w} x_0$

$$\Rightarrow x^*(x_i) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x_0)$$

$$\Rightarrow x^*(x_0) = \lim_i x^*(x_i) \leq \sup_{i\in I} x^*(x_i) \leq \lambda < \mu \leq x^*(x_0),$$

άτοπο!

Άρα, $\overline{A}^{\|\cdot\|} = \overline{A}^{w}$. ∎

→ Πορίσματα του Θ. Mazur: Έστω $(X, \|\cdot\|)$, διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$.

① Αν $Y \leq X$, τότε: $\overline{Y}^{w} = \overline{Y}^{\|\cdot\|}$.

Απόδ: Κάθε υπόχωρος του X είναι κυρτό σύνολο.

② Έστω $(x_i)_{i\in I}$ δίκτυο στον X. Τότε:

$$\overline{\{x_i : i\in I\}}^{w} \subseteq \overline{\operatorname{conv}\{x_i : i\in I\}}^{w} \underset{\text{Mazur}}{=\!=} \overline{\operatorname{conv}\{x_i : i\in I\}}^{\|\cdot\|}.$$

Άρα: αν $x_i \xrightarrow{w} x_0$, τότε υπάρχει ακολουθία! $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών των x_i, με $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$.

$\rightarrow$ $\underline{\text{Πχ}}$: Αν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^\infty(\mathbb{R})$ με $f_n \xrightarrow{w} 0$, τότε

υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυρτών συνδυασμών των

f_n με $\|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

→ Συμβ.: Για απλότητα, στο εξής συμβολίζουμε:

$$B_X := B_X(0,1),$$
$$\tilde{B}_X := \tilde{B}_X(0,1),$$
$$S_X := S_X(0,1).$$

Θα δείξουμε το εξής:

→ Άσκηση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$.

(διαν. επί του $\mathbb{R}$)

Τότε, $\overline{S_X}^{w} = \tilde{B}_X$.