Ασκήσεις σε ασθενείς τοπολογίες:

① Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$. Δείξτε τα εξής:

(α) Κάθε βασική περιοχή του 0 ως προς την $\mathcal{T}_w$

$$B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) := \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}$$

είναι άφραχτη. Μάλιστα, περιέχει απειροδιάστατο υπόχωρο του X.

(Άρα, κάθε w- περιοχή οποιουδήποτε $x_0 \in X$ περιέχει απειροδιάστατο αφφινικό υπόχωρο.)

(β) Η $B_X(0,1) \notin \mathcal{T}_w$. (Άρα, $B_X(x,r) \notin \mathcal{T}_w$, για κανένα $x \in X$, $r>0$.)

(γ) Η $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ <u>δεν</u> είναι w- συνεχής σε κανένα $x_0 \in X$.

<u>Λύση</u>: (α) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* \subseteq B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$.

Ο $\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*$ είναι υπόχωρος του X, και μάλιστα συνδιάστασης $\leq n$ (αφού κάθε $\ker x_i^*$ έχει συνδιάσταση ≤ 1:

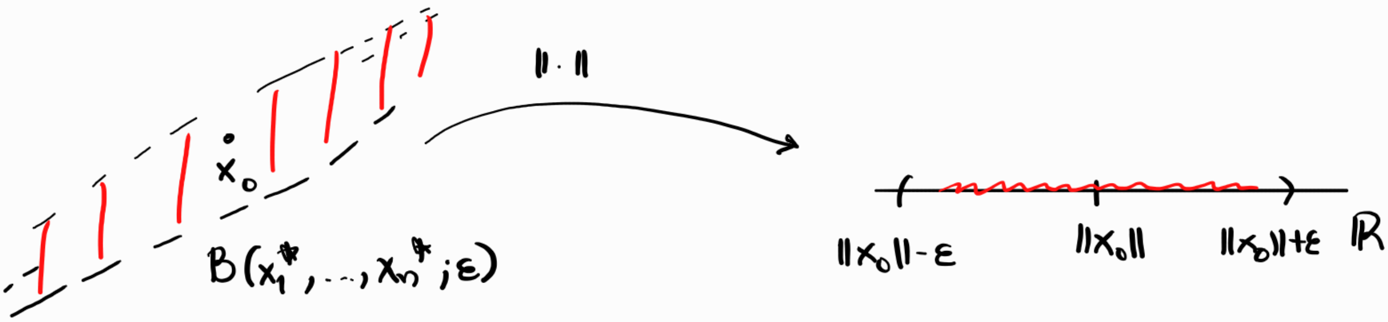
$$x_i^* : X \longrightarrow \mathbb{K} \text{ γραμμική} \Rightarrow X/_{\ker x_i^*} \simeq \operatorname{Im} x_i^* \leq \mathbb{K} \;)$$

Αφού $\dim X = +\infty$, $\dim \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* = +\infty$ (αρκούν $\leq n$ διανύσματα $x_1, \dots, x_n \in X$ ώστε $X = \operatorname{span}\{\bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^*, x_1, \dots, x_n\}$, άρα είναι αδύνατον να ισχύει ότι $\dim \bigcap_{i=1}^{n} \ker x_i^* < +\infty$).

(β) Έστω ότι η $B_X(x,r) \in \mathcal{T}_w$, για κάποιο $x \in X$ και $r>0$.

Από το (α), η $B_X(x,r)$ είναι άφραχτη, άτοπο.

(γ) Έστω $x_0 \in X$. Έστω ότι η $\|\cdot\| : (X,w) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής στο x_0. Τότε:



$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$ ώστε:

$$\|\cdot\|\Big(B(x_1^*,\dots,x_n^*;\delta) \Big) \subseteq \Big(\|x_0\|-\varepsilon, \|x_0\|+\varepsilon \Big),$$

άρα ώστε $B(x_1^*,\dots,x_n^*;\delta)$ φραγμένο, άτοπο!

② Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R})$, για κάποιο $1 \le p < +\infty$.

Τι σημαίνει ότι $f_n \xrightarrow{w} f$, για κάποια $f \in L^p(\mathbb{R})$;

<u>Λύση:</u> Σημαίνει ότι $x^*(f_n) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(f)$, $\forall x^* \in (L^p(\mathbb{R}))^* \simeq L^q(\mathbb{R})$,

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Συγκεκριμένα, $(L^p(\mathbb{R}))^* = \{ T_g : g \in L^q(\mathbb{R}) \}$, όπου, $\forall g \in L^q(\mathbb{R})$, η

$$T_g : (L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|),$$

με
$$T_g(f) := \int_{\mathbb{R}} f \cdot g \, d\lambda, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}),$$

έχει $\|T_g\| = \|g\|_q$.

Άρα, $f_n \xrightarrow{w} f$ σημαίνει ότι:

$$T_g(f_n) \xrightarrow{|\cdot|} T_g(f) \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}),$$

δηλ. $$\int_{\mathbb{R}} f_n \cdot g \, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f \cdot g \, d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}).$$

■

(3) Έστω $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, $\forall 1 < p < +\infty$,

$f_n \xrightarrow{w} 0$ στον $L^p(\mathbb{R})$.

<u>Λύση:</u> Πρέπει ΝΔΟ $x^*(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{|\cdot|} x^*(0) = 0$, $\forall x^* \in (L^p(\mathbb{R}))^*$.

Με βάση την Άσκηση 2, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι:

$$\int_{\mathbb{R}} g \cdot \chi_{[n,n+1]} \, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g \cdot 0 \, d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}),$$

δηλ. $$\boxed{\int_{[n,n+1]} g \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R})} \quad (*)$$

(όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Πρώτα δείχνουμε την (*) για $g \in C_c(\mathbb{R})$ (δηλαδή, συνεχή με συμπαγή φορέα). Έστω $g \in C_c(\mathbb{R})$. Για μεγάλα n, $g = 0$ στο $[n, n+1]$, άρα $\int_{[n,n+1]} g \, d\lambda = 0$. Άρα, όντως $\int_{[n,n+1]} g \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Για τυχαία $g \in L^q(\mathbb{R})$ αφού $q \neq +\infty$ (καθώς $p \neq 1$), $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists\, h_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $\|g - h_\varepsilon\|_q < \varepsilon$. Άρα,

$$\left| \int_{[n,n+1]} g \, d\lambda \right| \leq \left| \int_{[n,n+1]} g \, d\lambda - \int_{[n,n+1]} h_\varepsilon \, d\lambda \right| + \left| \int_{[n,n+1]} h_\varepsilon \, d\lambda \right|$$

$$\leq \underbrace{\int_{[n,n+1]} |g - h_\varepsilon| \, d\lambda}_{\leq \, \|g-h_\varepsilon\|_q \cdot \underbrace{\|\chi_{[n,n+1]}\|_p}_{=1} \, = \, \|g-h_\varepsilon\|_q \, < \, \varepsilon} + \underbrace{\left| \int_{[n,n+1]} h_\varepsilon \, d\lambda \right|}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0}$$

, καθώς $h_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R})$.

Άρα, για μεγάλα n, $\left| \int_{[n,n+1]} g \, d\lambda \right| < 2\varepsilon$.

Επομένως, $\int_{[n,n+1]} g \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

■

4 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, $x \in X$.

Δείξτε τα εξής:

(α) Αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, τότε $x_n \xrightarrow{w} x$.

(β) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε δεν ισχύει αναγκαστικά ότι $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$,

και μάλιστα ούτε και ότι $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

(γ) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

<u>Λύση</u>: (α) Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής απεικόνιση : $(X, \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Άρα, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow x^*(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

(β) Αυτό προκύπτει από την προηγούμενη Άσκηση. Για $1 < p < +\infty$, στον $L^p(\mathbb{R})$ έχουμε ότι

$$\chi_{[n,n+1]} \xrightarrow{w} 0,$$

ενώ $\|\chi_{[n,n+1]}\|_p = 1 \not\to \|0\|_p = 0$.

(γ) $\exists\ x^* \in X^*$, με $\|x^*\| = 1$, ώστε $x^*(x) = \|x\|$.

Έτσι: $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x) = \|x\|$,

άρα $\|x\| = \lim_{n\to+\infty} x^*(x_n) = \liminf_n \underbrace{x^*(x_n)}_{\leq \underbrace{\|x^*\|}_{=1} \cdot \|x_n\| = \|x_n\|}$

$\leq \liminf_n \|x_n\|$. ■

⑤ Έστω $1 < p < +\infty$, $x_0 \in \ell^p$, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον ℓ^p.

Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

(β) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty$, και $x_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} x_0(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Λύση: (α) $\Rightarrow$ (β): $x_n \xrightarrow{w} x_0$ στον ℓ^p. Ισοδύναμα,

$$T_y(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T_y(x_0) \quad \forall\, y \in \ell^q, \text{ όπου}$$

$$T_y : \ell^p \to \mathbb{K}$$

με $T_y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)y(k) \quad \forall\, x = (x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots) \in \ell^p$,

και $\|T_y\| = \|y\|_q$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k)y(k) \quad , \quad \forall\, y \in \ell^q.$$

Συγκεκριμένα, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, για $y = e_k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{θέση } k}}{1}, 0, \ldots) \in \ell^q$,

παίρνουμε: $x_n(k) \xrightarrow{|\cdot|} x_0(k)$.

Για ΝΔΟ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty$, βλέπουμε κάθε x_n ως

τον τελεστή $T_{x_n} : \ell^q \to \mathbb{K}$,

με $T_{x_n}(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_n(k)y(k) \quad \forall\, y \in \ell^q$.

Έχουμε ότι $\|T_{x_n}\| = \|x_n\|_p \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, άρα

αρκεί ΝΔΟ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_{x_n}\| < +\infty$. Αυτό προκύπτει από την

Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος: Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια τελεστών $T: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$, όπου ο $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι Banach. Αν

$$\sup \{ \|Tx\|_Y : T \in \mathcal{F} \} < +\infty, \quad \forall x \in X,$$

τότε $\sup \{ \|T\| : T \in \mathcal{F} \} < +\infty$.

Στην περίπτωσή μας, $\forall y \in \ell^q$, έχουμε ότι $T_{x_n}(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_{x_0}(y) \in \mathbb{K}$ (καθώς $x_n \xrightarrow{w} x_0$), άρα η ακολουθία $(T_{x_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη στο $\mathbb{K}$, δηλ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_{x_n}(y)| < +\infty, \quad \forall y \in \ell^q.$$

Άρα, αφού κάθε $T_{x_n} : (\ell^q, \|\cdot\|_q) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$, όπου ο $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ είναι Banach, προκύπτει από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_{x_n}\| < +\infty, \text{ δηλ. } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty.$$

(β) $\Rightarrow$ (α): Ξέρουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, και ότι $x_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$,

δηλ. ότι $T_{e_k}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T_{e_k}(x_0)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(όπου η $T_y : (\ell^p, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ ικανοποιεί

$$T_y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)\, y(k) \quad \forall x \in \ell^p).$$

(*)

Εύκολα προκύπτει ότι $\boxed{T_y(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T_y(x_0) \quad \forall y \in c_{00}}$

όπου $c_{00} := \{ x \in \ell^p :$ πεπερασμένοι μόνο όροι $x(k)$ είναι $\neq 0\}$

$= \operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Για ΝΔΟ $x_n \xrightarrow{w} x_0$, πρέπει ΝΔΟ $T_y(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T_y(x_0)$

$\forall y \in \ell^q$. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός

στον $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$. Έστω $y \in \ell^q$ και $\varepsilon > 0$.

$\exists\ y_\varepsilon \in c_{00}$ με $\|y - y_\varepsilon\|_q < \varepsilon$. Τότε:

$$|T_y(x_n) - T_y(x_0)| \leq$$

$$\leq |T_y(x_n) - T_{y_\varepsilon}(x_n)| + |T_{y_\varepsilon}(x_n) - T_{y_\varepsilon}(x_0)| + |T_{y_\varepsilon}(x_0) - T_y(x_0)|$$

- $|T_y(x_n) - T_{y_\varepsilon}(x_n)| = |T_{y-y_\varepsilon}(x_n)| \leq \underbrace{\|y-y_\varepsilon\|_q}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|x_n\|_p}_{\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}}$

$$\leq M \cdot \varepsilon$$

(όπου $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p$).

- $|T_{y_\varepsilon}(x_n) - T_{y_\varepsilon}(x_0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, άρα είναι $<\varepsilon$ για μεγάλα n (λόγω της $\circledast$).

- ΘΔΟ $\|x_0\|_p < +\infty$ (δηλ. ότι $x_0 \in \ell^p$). Τότε,

$$|T_{y_\varepsilon}(x_0) - T_y(x_0)| = |T_{y_\varepsilon - y}(x_0)| \leq \|y_\varepsilon - y\|_q \cdot \|x_0\|_p$$
$$\leq \|x_0\|_p \cdot \varepsilon .$$

Άρα, για μεγάλα n, $|T_y(x_n) - T_y(x_0)| \leq \varepsilon \cdot (1 + M + \|x_0\|_p)$.

Άρα, $T_y(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T_y(x_0)$.

Μένει ΝΔΟ $\|x_0\|_p < +\infty$, γνωρίζοντας ότι

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty$, και
- $x_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} x_0(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\circledast'$

Ισχύει ότι $\boxed{\|x_0\|_p = \sup_{\substack{\|y\|_q \leq 1 \\ y \in \ell^q}} \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k) y(k) .}$

Αυτό είναι γνωστό, και ισχύει ανεξαρτήτως του αν $\|x_0\|_p = +\infty$ ή $<+\infty$ (απλό).

$\circledast''$

Δείχνουμε τώρα ότι $\boxed{\|x_0\|_p = \sup_{\substack{\|y\|_q \leq 1 \\ y \in c_{00}}} \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k) y(k) :}$

- Αν $\|x_0\|_p < +\infty$, λόγω της (φ'), $\exists\ y \in \ell^q$, με $\|y\|_q = 1$,

ώστε $\left| \|x_0\|_p - \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k)\, y(k) \right| < \varepsilon$.

$$\|y\|_q^q = \sum_{k=1}^{+\infty} |y(k)|^q < +\infty, \quad \text{άρα} \quad \exists\ N \in \mathbb{N}:$$

$\| y_N - y \|_q < \dfrac{\varepsilon}{\|x_0\|_p + 1}$, όπου $y_N := (y(1), \dots, y(N), 0, 0, \dots) \in c_{00}$.

Και: $\|y_N\|_q \leq 1$, αφού $\|y_N\|_q \leq \|y\|_q$. Άρα:

$$\left| \|x_0\|_p - \sum_{k=1}^{N} x_0(k)\, y_N(k) \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \|x_0\|_p - \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k) y(k) \right|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k) y(k) - \sum_{k=1}^{N} x_0(k) y_N(k) \right|}_{\leq}$$

$$\leq \|x_0\|_p \cdot \|y - y_N\|_q \leq \|x_0\|_p \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_0\|_p + 1} < \varepsilon.$$

Τέλος, αφού $y_N \in \ell^q$ και $\|y_N\|_q \leq 1$, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} x_0(k)\, y_N(k) \leq \|x_0\|_p.$$

Έτσι, η (φ'') ισχύει.

- Αν $\|x_0\|_p = +\infty$, τότε, λόγω της (*'), $\forall\, M > 0$

$\exists\, y \in \ell^q$, με $\|y\|_q = 1$, ώστε $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k)\, y(k) > M$

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ ώστε $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_0(k)\, y(k) > M$.

Άρα, το $y_N := (y(1), y(2), \dots, y(N), 0, 0, \dots) \in c_{00}$,

έχει $\|y_N\|_q \leq \|y\|_q = 1$, και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_0(k)\, y_N(k) > M.$$

Αυτό αποδεικνύει την (*'').

(6) Σε κάθε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ με $\dim X = +\infty$,

$$\overline{S_X}^{w} = \tilde{B}_X.$$

Λύση: $\boxed{\subseteq}$: $\tilde{B}_X = \overline{\tilde{B}_X}^{\|\cdot\|} \underset{\substack{\text{Mazur} \\ (\tilde{B}_X \text{ κυρτό})}}{=\!=\!=\!=} \overline{\tilde{B}_X}^{w}$.

Άρα, $\tilde{B}_X$ w-κλειστό.

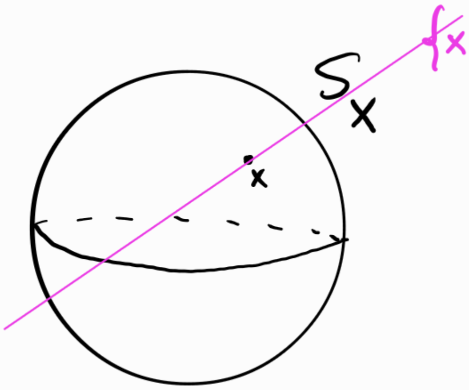
Αφού λοιπόν $S_X \subseteq \underbrace{\tilde{B}_X}_{w\text{-κλειστό}}$, έχουμε και ότι

$$\overline{S_X}^{w} \subseteq \tilde{B}_X .$$

$\boxed{2}$: Έστω $x \in \tilde{B}_X$. ΘΔΟ $x \in \overline{S_X}^{w}$.

Αν $\|x\|=1$, τότε $x \in S_X \subseteq \overline{S_X}^{w}$, άρα τελειώσαμε.

Έστω λοιπόν ότι $\|x\| \lneq 1$.



Πρέπει ΝΔΟ $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}_w$, με $x \in \mathcal{U}$, έχουμε ότι $\mathcal{U} \cap S_X \neq \emptyset$.

Έστω λοιπόν $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_w$ με $x \in \mathcal{U}$.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$x + \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\}}_{=:\ B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)} \subseteq \mathcal{U}.$$

Αφού $\dim X = +\infty$, η $B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$ περιέχει απειροδιάστατο υπόχωρο. Άρα, $\exists\, y \neq 0$ στον X, με $\lambda y \in B(x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Το $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $(\subseteq \mathcal{U})$ τέμνει την S_X:

Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

με $f(\lambda) := \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής. Και:

- $f(0) = \|x\| \lneq 1$,
- $f(\lambda) = \|x + \lambda y\| \geqslant |\lambda| \cdot \|y\| - \|x\| \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} +\infty$.

Από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$f(\lambda_0) = 1$, δηλ. ώστε $\|x + \lambda_0 y\| = 1$, δηλ.

ώστε $x + \lambda_0 y \in S_X$.

$\blacksquare$