⊙ Φραγμένα σύνολα στον $(X^*, \|\cdot\|)$:

→ **Πρόταση:** Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $A \subseteq X^*$. Τότε:

Το A είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο $\iff$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$, $\forall x \in X$.

νόρμα τελεστών

→ **Απόδ:** $(\Longrightarrow)$ A $\|\cdot\|$ φραγμένο $\Longrightarrow$ $\exists M > 0 : \|x^*\| \leq M \ \forall x^* \in A$.

Άρα, $\forall x \in X$: $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x^* \in A$

$\Longrightarrow$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο.

$(\Longleftarrow)$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\forall x \in X$, δηλ.

$\forall x \in X$, ισχύει ότι $\sup\{|x^*(x)| : x^* \in A\} < +\infty$

$\xRightarrow[\substack{\text{Αρχή} \\ \text{Ομοιομόρφου} \\ \text{Φράγματος} \\ ((X, \|\cdot\|) \text{ Banach})}]{}$ $\sup\{\|x^*\| : x^* \in A\} < +\infty$, δηλ. A $\|\cdot\|$-φραγμένο.

$\blacksquare$

→ Πορίσματα του Θ. Alaoglu:

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $A \subseteq X^*$.
Τότε, το A είναι w^*-συμπαγές $\Longleftrightarrow$ A w^*-κλειστό και $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Απόδ.: $(\Longrightarrow)$ Έστω $A \subseteq X^*$ w^*-συμπαγές. Τότε, A w^*-κλειστό.

Επίσης, $\forall x \in X$, το $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ είναι φραγμένο.

Εξήγηση 1: $\{\underbrace{x^*(x)}_{\tau(x)(x^*)} : x^* \in A\} = \tau(A)$ συμπαγές $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$, άρα φραγμένο.

συνεχής: $(X^*, w^*) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$

w^*-συμπαγές $\subseteq X^*$

Εξήγηση 2: Έστω ότι το $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ είναι άφραγτο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$\Longrightarrow \exists\, (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $|x_n^*(x)| \longrightarrow +\infty$.

Το A είναι w^*-συμπαγές $\Longrightarrow \exists\, (x_{k_n}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{k_n}^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$, για κάποιο $x_0^* \in A$ $\longrightarrow x_{k_n}^*(x) \to x_0^*(x)$

$\longrightarrow |x_{k_n}^*(x)| \to |x_0^*(x)| \neq +\infty$, άτοπο.

Άρα, το A είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο (καθώς $(X, \|\cdot\|)$ Banach).

$(\Longleftarrow)$ Έστω ότι το A είναι w^*-κλειστό και $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Τότε, $\exists\ M>0$: $\underbrace{A}_{w^*\text{-κλειστό}} \subseteq \underbrace{\widetilde{B}_{X^*}(0,M)}_{\substack{w^*\text{-συμπαγής} \\ \text{(Alaoglu)}}} \longrightarrow A\ w^*$-συμπαγές.

$\blacksquare$

(2) Κάθε χώρος Banach $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με έναν κλειστό υπόχωρο κάποιου $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, όπου

$$C(K) = \{ f : (K, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ συνεχής} \},$$

για κάποιον $(K, \mathcal{T})$ συμπαγή χώρο Hausdorff. Συγκεκριμένα, μπορούμε να επιλέξουμε $(K, \mathcal{T}) = (\widetilde{B}_{X^*}, w^*)$.

<u>Απόδ.:</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ Banach. Ορίζουμε

$$T : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (C(\widetilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty), \quad \text{με}$$

συνεχείς $f : (B_{X^*}, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$

$$x \longrightarrow f_x := \tau(x)\big|_{\widetilde{B}_{X^*}}$$

$$\left(f_x(x^*) = x^*(x), \ \forall x^* \in \widetilde{B}_{X^*} \right).$$

- Η T είναι $\overset{\text{απλά}}{\text{γραμμική}}$ ισομετρία:

$$\forall x \in X, \quad \| f_x \|_\infty = \sup \{ | f_x(x^*) | : x^* \in \widetilde{B}_{X^*} \}$$

$$= \sup \{ |x^*(x)| : x^* \in \widetilde{B}_{X^*} \}$$

$$= \|x\|.$$

- $\forall x \in X$, η $f_x : \widetilde{B}_{X^*} \to \mathbb{K}$ είναι w^*-συνεχής (δηλ., πράγματι η T είναι καλά ορισμένη, με σύνολο αφίξεως το $C(\tilde{B}_{X^*})$:

$\forall$ $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$ στην $\tilde{B}_{X^*}$, ισχύει ότι $\underbrace{x_i^*(x)}_{\overset{\|}{f_x(x_i^*)}} \xrightarrow{|\cdot|} \underset{\overset{\|}{f_x(x_0^*)}}{x_0^*(x)}$,

δηλ. $f_x(x_i^*) \xrightarrow{|\cdot|} f_x(x_0^*)$.

■

- Ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(C(\tilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty)$:

Έστω $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, για κάποια $g : (\tilde{B}_{X^*}, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$

συνεχή.

Τότε , $g \in T(X)$:

Η $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $\left(C(\tilde{B}_{X^*}), \|\cdot\|_\infty\right)$

$\xrightarrow[\text{ισομετρία}]{T}$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(X, \|\cdot\|)$

$\xrightarrow[\text{Banach}]{(X,\|\cdot\|)}$ $\exists\ x_0 \in X$ ώστε $\underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\substack{\| \\ \|Tx_n - Tx_0\|_\infty}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

δηλ. ώστε $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} Tx_0$. Ο (X^*, w^*) είναι χώρος Hausdorff, άρα $y = Tx_0$. Άρα, $y \in T(X)$. ∎

! → $\boxed{(X^{**}, w^*)}$: Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall\ (Y, \|\cdot\|)$, η w^* είναι η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον Y^* ώστε κάθε $\tau(x) : (Y^*, w^*) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής. Άρα, η w^*-τοπολογία στον X^{**} είναι η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X^{**} ώστε κάθε $\tau(x^*) : (X^{**}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$,

με $\tau(x^*)(x^{**}) = x^{**}(x^*)$ $\forall x^{**} \in X^{**}$,

να είναι συνεχής. Κάθε $\tau(x^*) \in X^{***}$, και $\|\tau(x^*)\| = \|x^*\|$.

Σχηματικά:

$$(X, w) \dashrightarrow (X^*, w^*) \dashrightarrow (X^{**}, w^*) \dashrightarrow X^{***}$$

οι $\underbrace{\tau(x)}: X^* \longrightarrow \mathbb{K}$,

$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \ \forall x^* \in X^*$,

συνεχείς.

οι $\underbrace{\tau(x^*)}: X^{**} \longrightarrow \mathbb{K}$,

$\tau(x^*)(x^{**}) = x^{**}(x^*) \ \forall x^{**} \in X^{**}$,

συνεχείς.

Ξέρουμε πως ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\Longleftrightarrow$ η $\tau : X \hookrightarrow X^{**}$ είναι επί, δηλ. $\Longleftrightarrow$ $\tau(\tilde{B}_X) = \tilde{B}_{X^{**}}$. Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι αυτά τα σύνολα "δε διαφέρουν πολύ".

! $\rightarrow$ $\boxed{\text{Θεώρημα Goldstine}}$: Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Τότε, $\overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*} = \tilde{B}_{X^{**}}$.

Απόδ: Η $\tau : X \to X^{**}$ είναι ισομετρία. Άρα,

$$\tau(\tilde{B}_X) \subseteq \underbrace{\tilde{B}_{X^{**}}}_{\substack{w^*\text{-συμπ. (Alaoglu),} \\ \text{άρα } w^*\text{-κλειστό}}} \Longrightarrow \overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*} \subseteq \tilde{B}_{X^{**}}.$$

Έστω τώρα ότι $\exists\, x_0^{**} \in \tilde{B}_{X^{**}}$ ώστε $x_0^{**} \notin \overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*}$.

Το $\{x_0^{**}\}$ είναι w^*-συμπαγές κυρτό, και ο
το $\overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*}$ είναι w^*-κλειστό κυρτό (άσκηση)

(X^{**}, w^*) είναι τοπικά κυρτός. Άρα, $\exists\ f \in (X^{**}, w^*)^* = \tau(X^*)$

οι συνεχείς $f : (X^{**}, w^*) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι οι υπολογισμοί σε στοιχεία του X^*.

και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{y \in \overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*}} f(y) < \lambda < f(x_0^{**})$$

(δηλ., ώστε η f να διαχωρίζει αυστηρά τα $\{x_0^{**}\}$, $\overline{\tau(\tilde{B}_X)}^{w^*}$).

$\exists\ x_1^* \in X^*$ ώστε $f = \tau(x_1^*)$. Επομένως, το παραπάνω $\Longrightarrow$

$$\boxed{\sup_{y \in \tilde{B}_X} \underbrace{\tau(y)\,(x_1^*)}_{= x_1^*(y)} < \lambda < x_0^{**}(x_1^*)} \quad (*)$$

• Το αριστερό μέλος της $(*)$ ισούται με $\sup_{y \in \widetilde{B}_X} x_1^*(y) = \|x_1^*\|$.

• Το $x_0^{**} \in \widetilde{B}_{X^{**}} \Longrightarrow \|x_0^{**}\| \leq 1$.

Άρα, το δεξί μέλος της $(*)$ είναι $\leq |x_0^{**}(x_1^*)| \leq \|x_0^{**}\| \cdot \|x_1^*\| \leq \|x_1^*\|$.

Επομένως, $(*) \Longrightarrow \|x_1^*\| < \lambda < \|x_1^*\|$, άτοπο.

Άρα, $\overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*} = \widetilde{B}_{X^{**}}$. ∎

→ Πόρισμα: $\overline{\tau(X)}^{w^*} = X^{**}$.

Απόδ.: Από Θ. Goldstine, $\overline{\tau(\tilde{B}_X(0,1))}^{w^*} = \tilde{B}_{X^{**}}(0,1)$

$\longrightarrow \forall r>0, \quad \overline{\tau(\tilde{B}_X(0,r))}^{w^*} = \tilde{B}_{X^{**}}(0,r)$

$$\Rightarrow \overline{\tau(X)}^{w^*} = \overline{\tau\Big(\bigcup_{r>0} \tilde{B}_X(0,r)\Big)}^{w^*} \supseteq \bigcup_{r>0} \overline{\tau(\tilde{B}_X(0,r))}^{w^*}$$

$$= \bigcup_{r>0} B_{X^{**}}(0,r) = X^{**}.$$

Αφού $\overline{\tau(X)}^{w^*} \subseteq X^{**}$, έχουμε ισότητα. ∎

→ **Αυτοπαθείς χώροι** : Με τη βοήθεια των Θ. Alaoglu και Goldstine, παίρνουμε έναν πολύ όμορφο χαρακτηρισμό των αυτοπαθών χώρων. Θα μας είναι χρήσιμο το εξής:

→ Παρατήρηση: Η $\tau : (\tilde{B}_X, w) \longrightarrow (\tau(\tilde{B}_X), w^*)$ είναι ομοιομορφισμός:

Πράγματι, η τ είναι 1-1 και επί, και είναι αμφισυνεχής καθώς: $x_i \xrightarrow{w} x_0 \Longleftrightarrow \tau(x_i) \xrightarrow{w^*} \tau(x_0)$:

$$x_i \xrightarrow{w} x_0 \iff \underbrace{x^*(x_i)}_{\tau(x_i)(x^*)} \xrightarrow{|\cdot|} \underbrace{x^*(x_0)}_{\tau(x_0)(x^*)} \quad \forall x^* \in X^* .$$

$\blacksquare$

→ Θεώρημα: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\iff$ η $(\tilde{B}_X, w)$ είναι συμπαγής.

Αποδ.: Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής $\iff \tau(\tilde{B}_X) = \tilde{B}_{X^{**}}$. Άρα:

$(\Longrightarrow)$ Αν $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής, τότε $\tau(\tilde{B}_X) = \tilde{B}_{X^{**}}$, w^*-συμπαγής (Alaoglu)

$$\Rightarrow \left(\tau(\widetilde{B}_X), w^*\right) \text{ συμπαγής } \xRightarrow[\text{ομοιομορφισμός}]{\tau:(X,w)\to(X^*,w^*)} (\widetilde{B}_X, w) \text{ συμπαγής.}$$

$$(\Leftarrow) \text{ Αν } (\widetilde{B}_X, w) \text{ συμπαγής } \xRightarrow[\text{ομοιομορφισμός}]{\tau:(X,w)\to(X^*,w^*)} \left(\tau(\widetilde{B}_X), w^*\right) \text{ συμπαγής}$$

$$\Rightarrow \tau(\widetilde{B}_X) \ w^*\text{-κλειστό} \Rightarrow \tau(\widetilde{B}_X) = \overline{\tau(\widetilde{B}_X)}^{w^*} \underset{\text{Goldstine}}{=\!=} \widetilde{B}_{X^{**}}$$

$$\Rightarrow (X, \|\cdot\|) \text{ αυτοπαθής.}$$

$\blacksquare$

Ασκήσεις σε w^* τοπολογίες.

① Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X^*, και $x^* \in X^*$ με $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Δείξτε ότι:

(α) $\|x^*\| \leq \liminf_n \|x_n^*\|$.

(β) Αν επιπλέον ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι Banach, τότε η $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

<u>Λύση</u>: (α) $\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|$. $\forall\, x\in X$, έχουμε ότι

$$x_n^*(x) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x) \Longrightarrow |x_n^*(x)| \xrightarrow{|\cdot|} |x^*(x)|$$

$$\Rightarrow |x^*(x)| = \lim_{n\to+\infty} |x_n^*(x)| = \liminf_n \underbrace{|x_n^*(x)|}_{\leq \|x_n^*\|\cdot\|x\|}$$

$$\leq \liminf_n \|x_n^*\|, \quad \forall x\in X \text{ με } \|x\|=1.$$

Άρα, $\sup_{\|x\|=1} |x^*(x)| \leq \liminf_n \|x_n^*\|$.

(β) Από αρχή ομοιομόρφου φράγματος, οι τελεστές

$x_n^* : \underbrace{(X, \|\cdot\|)}_{\text{Banach!}} \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι

(δηλ., $\exists\, M\in\mathbb{R}$ ώστε $\|x_n^*\| \leq M \ \ \forall n\in\mathbb{N}$) αν:

$\forall x \in X$, το $\{x_n^*(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$. Και όντως, $\forall x \in X$ αυτό ισχύει, αφού $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^* \Longrightarrow x_n^*(x) \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x) \in \underline{\mathbb{K}}$, δηλ. η ακολουθία $(x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, και άρα φραγμένη.

(2) Κατασκευάστε μια φραγμένη ακολουθία $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $(\ell^\infty)^*$, που να μην έχει w^*-συγκλίνουσα υπακολουθία. Γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίφαση με το Θ. Alaoglu;

<u>Λύση</u>: $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $e_n^* : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$,

με $e_n^*(x) := x_n, \ \forall\, x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$

(δηλ., η e_n^* είναι η προβολή στη n-οστή συντεταγμένη).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n^* \in (\ell^\infty)^*$ και $\|e_n^*\| \leq 1$

$\left(\forall\, x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty,\ |e_n^*(x)| = |x_n| \leq \|x\|_\infty \right)$.

Άρα, η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στην $\tilde{B}_{(\ell^\infty)^*}$.

Ενώ η $\tilde{B}_{(\ell^\infty)^*}$ είναι w^*-συμπαγής (από το Θεώρημα

Alaoglu), η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>δεν</u> έχει w^*-συγκλίνουσα

υπακολουθία:

Έστω, προς άτοπο, ότι $\exists\ (e_{k_n}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ με

$e_{k_n}^* \xrightarrow{w^*} x^*$, για κάποιο $x^* \in (\ell^\infty)^*$.

Αυτό σημαίνει ότι, $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$,

$$\underbrace{e_{k_n}^*(x)}_{= x_{k_n}} \xrightarrow{|\cdot|} x^*(x) \in \mathbb{K}, \text{ και άρα η}$$

$(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, $\forall$ $x = (x_1, x_2, \dots)$ φραγμένη ακολουθία.

Αυτό προφανώς είναι εσφαλμένο.

Αυτό δεν έρχεται σε αντίφαση με το Θ. Alaoglu. Το ότι η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία, και άρα δίκτυο, μέσα στο w^*-συμπαγές σύνολο $\widetilde{B}_{(\ell^\infty)^*}$, σημαίνει ότι η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει <u>υποδίκτυο</u> που συγκλίνει ως προς την

w^* μέσα στην $\tilde{B}_{(\ell^\infty)^*}$. Και μία ακολουθία έχει υποδίκτυα που δεν είναι υπακολουθίες της.

③ Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$.

Δείξτε ότι κάθε w^*-ανοιχτό υποσύνολο του X^* περιέχει απειροδιάστατο αφφινικό υπόχωρο του X^* (και συνεπώς είναι άφραχτη).

<u>Λύση</u>: $\dim X = +\infty \implies \dim X^* = +\infty$.

Αρκεί ΝΔΟ κάθε w^*-περιοχή του $0 \in X^*$ περιέχει απειροδιάστατο υπόχωρο του X^* (καθώς κάθε w^*-περιοχή του τυχαίου $x_0^* \in X^*$ είναι της μορφής $x_0^* + U$, για κάποια w^*-περιοχή του $0 \in X^*$).

Άρα, αρκεί να δειχθεί το παραπάνω για κάθε βασική περιοχή

$$B(x_1, \dots, x_n ; \varepsilon) := \bigcap_{i=1}^{n} \{ x^* \in X^* : \underbrace{|x^*(x_i)|}_{\substack{\| \\ |\tau(x_i)(x^*)|}} < \varepsilon \}$$ του $0 \in X^*$.

Η $\bigcap_{i=1}^{n} \ker\tau(x_i) \subseteq B(x_1,\dots,x_n;\varepsilon)$, και είναι υπόχωρος του X^*. Μάλιστα, έχει συνδιάσταση $\leq n$, και άρα άπειρη διάσταση (αφού $\dim X^* = +\infty$), καθώς κάθε $\ker\tau(x_i)$ έχει συνδιάσταση ≤ 1 ($\underbrace{\tau(x_i)}_{\text{γραμμική}} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \quad X^* / \ker\tau(x_i) \simeq \underbrace{\operatorname{Im}\tau(x_i)}_{\text{διάσταση } 0 \text{ ή } 1} \Big).$$

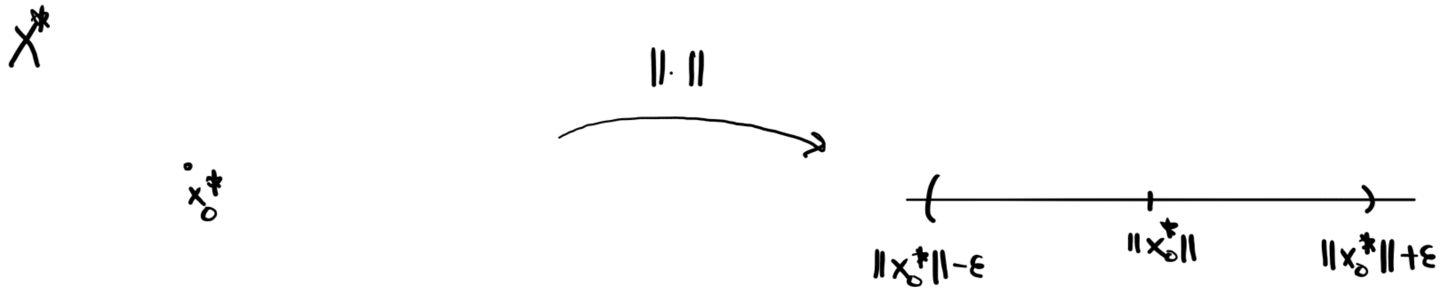
Άρα, όντως η $B(x_1,\dots,x_n;\varepsilon)$ περιέχει απειροδιάστατο υπόχωρο.

∎

④ Η απεικόνιση $\|\cdot\| : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι w^*-συνεχής, σε κανένα $x_0^* \in X^*$.

<u>Λύση:</u> Έστω, προς άτοπο, ότι $\exists\ x_0^* \in X^*$ ώστε η

$$\|\cdot\| : (X^*, w^*) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ να είναι συνεχής στο } x_0^*.$$



Τότε, $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists$ w^*-περιοχή U_ε του x_0^*, ώστε

$\|\cdot\|(U_\varepsilon) \subseteq (\|x_0^*\|-\varepsilon, \|x_0^*\|+\varepsilon)$, και άρα ώστε

το U_ε να είναι φραγμένο $\subseteq X^*$.

Αυτό δεν ισχύει για καμία w^*-περιοχή του x_0^*.
Άρα, η $\|\cdot\|$ δεν είναι συνεχής στο x_0^*.

■

(5) (α) Δείξτε ότι $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \simeq \ell^1$, και συγκεκριμένα ότι

$(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* = \{ T_x : c_0 \longrightarrow \mathbb{K} : x \in \ell^1 \}$, όπου,

$\forall\ x = (x(1), x(2), \dots) \in \ell^1$, ορίζουμε

$$T_x : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

με $T_x(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x(k)\, y(k)$, $\forall\ y = (y(1), y(2), \dots) \in c_0$,

και $\|T_x\| = \|x\|_{\ell^1}$.

(Υπενθύμιση: $c_0 := \{ x = (x(1), x(2), \dots) : x(k) \in \mathbb{K}\ \forall k \in \mathbb{N}$ και $x(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{|\cdot|} 0 \}$

= ο χώρος των ακολουθιών στο $\mathbb{K}$ που συγκλίνουν στο 0.)

(β) Δείξτε ότι το Θεώρημα Mazur δεν ισχύει στον (X^*, w^*).

Δηλαδή, <u>δεν</u> ισχύει ότι, για κάθε κυρτό $A \subseteq X^*$,

$$\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{\|\cdot\|}.$$

<u>Λύση:</u> (α) • $\{T_x : x \in \ell^1\} \subseteq (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$, και $\|T_x\| = \|x\|_{\ell^1}$,

$\forall x \in \ell^1$:

$\forall x \in \ell^1$,

$$|T_x(y)| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} x(k) y(k) \right| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty, \quad \forall y \in c_0.$$

Άρα, $T_x \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$, και $\|T_x\| \leq \|x\|_1$.

Τέλος, $\|T_x\| \geq \|x\|_1$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$y_n := (y_n(1), y_n(2), \dots)$, με

$$y_n(k) = \begin{cases} 0, & \forall k \geq n+1 \\ \dfrac{|x(k)|}{x(k)}, & \forall k \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x(k) \neq 0. \\ 0, & \forall k \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x(k) = 0. \end{cases}$$

Τότε, $T_x(y_n) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq k \leq n: \\ x(k) \neq 0}} \cancel{x(k)} \cdot \frac{|x(k)|}{\cancel{x(k)}} = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\xrightarrow[\|y_n\|_\infty \leq 1]{} \|T_x\| \geq T_x(y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

άρα $\quad \|T_x\| \geq \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \quad \forall k \in \mathbb{N},$

άρα $\quad \|T_x\| \geq \sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|.$

• $(c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \subseteq \{ T_x : x \in \ell^1 \}$.

Έστω $f \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$. Ισχυριζόμαστε ότι,

$\forall\, y = (y(1), y(2), \dots) \in c_0, \quad f(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} y(k) \cdot f(e_k)$, όπου

$e_k := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{θέση } k}}{1}, 0, 0, \dots) \quad \forall k \in \mathbb{N}$, και $(f(e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$.

Πράγματι:

⇝ Ορίζοντας $y_n := (y(1), \dots, y(n), 0, 0, \dots) \in c_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

έχουμε: $\quad y_n = \sum_{k=1}^{n} y(k) \cdot e_k \xrightarrow{f \text{ γραμμική}} f(y_n) = \sum_{k=1}^{n} y(k) \cdot f(e_k).$

Επίσης, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$, καθώς $\|y - y_n\|_\infty = \sup_{k \geq n} |y(k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

αφού $y(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Άρα, αφού η f είναι $\|\cdot\|_\infty$ - συνεχής,

έχουμε ότι $f(y_n) \xrightarrow{|\cdot|} f(y)$, και άρα

$$f(y) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} y(k) f(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} y(k) f(e_k).$$

Μένει ΝΔΟ $(f(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Αυτό προκύπτει επειδή

μόλις δείξαμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y(k)\cdot f(e_k) = f(y), \quad \forall y\in c_0$$

$$\xRightarrow{f\in (c_0,\|\cdot\|_\infty)^*} \left|\sum_{k=1}^{+\infty} y(k) f(e_k)\right| \leq \|f\|\cdot\|y\|_\infty, \ \forall y\in c_0$$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} y(k) f(e_k) \leq \|f\| \ (<+\infty), \quad \forall y\in \tilde{B}_{c_0}.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, ορίζουμε $y_n \in c_0$ με:

$$y_n(k) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & k\geqslant n+1 \\ \dfrac{|f(e_k)|}{f(e_k)}, & \forall 1\leq k\leq n \text{ με } f(e_k)\neq 0 \\ 0, & \forall 1\leq k\leq n \text{ με } f(e_k)=0 \end{array}\right\}$$

Έχουμε: $\|y_n\|_\infty \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, άρα

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} y_n(k) f(e_k)}_{\shortparallel} \leq \|f\| \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n:\\ f(e_k)\neq 0}} \frac{|f(e_k)|}{\cancel{f(e_k)}}\cdot \cancel{f(e_k)} = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|$$

$$\longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |f(e_k)| \leq \|f\| < +\infty .$$

Άρα, $\quad (f(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1 .$

(β) Έστω ότι, $\forall$ κυρτό $A \subseteq (c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \; (\simeq \ell^1)$, έχουμε ότι

(*) $$\boxed{\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{\|\cdot\|}} \quad \text{νόρμα τελεστών.}$$

Ισχύει ότι, με το συμβολισμό του (α), για τους $T_{e_k} \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$ έχουμε: $\quad T_{e_k} \xrightarrow{w^*} 0 \; ({}^{\prime\prime}T_0{}^{\prime\prime})$. Πράγματι, $\forall y \in c_0$,

$$T_{e_k}(y) = 1 \cdot y(k) = y(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{|\cdot|} 0 .$$

Άρα, $\quad 0 \in \overline{\{T_{e_k} : k\in\mathbb{N}\}}^{w^*} \subseteq \overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k\in\mathbb{N}\}}^{w^*} .$

Αν είχαμε ότι $\quad \overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k\in\mathbb{N}\}}^{w^*} = \overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k\in\mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} ,$

τότε θα ίσχυε ότι $\quad (0=)\, T_0 \in \overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k\in\mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ (νόρμα τελεστών),

δηλαδή ότι $\quad 0 \in \overline{\text{conv}\{e_k : k\in\mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_1} .$

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει: κάθε κυρτός συνδυασμός

$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, για $\lambda_i \geq 0$ και $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ και $n\in\mathbb{N}$, ικανοποιεί : $\|(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) - 0\|_1 = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| = 1$,

και άρα είναι αδύνατον να βρεθεί ακολουθία στο

$\text{conv}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ που να συγκλίνει στο 0 ως προς την

$\|\cdot\|_1$. Άρα,

$$\overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \neq \overline{\text{conv}\{T_{e_k} : k \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}.$$

■