Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο εξηγώντας ποιοι χώροι L^p είναι αυτοπαθείς.

→ Πρόταση: Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $1<p<+\infty$.

Ο $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι αυτοπαθής.

Αποδ.: Συμβολίζουμε $L^p := L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. Πρέπει ΝΔΟ η ισομετρία

$$\tau : L^p \hookrightarrow (L^p)^{**}$$

είναι επί. Έστω $x^{**} \in (L^p)^{**}$, δηλ. $x^{**} : (L^p)^{*} \to \mathbb{K}$

γραμμική και συνεχής. ΘΔΟ $\exists\ f \in L^p$ ώστε

$$x^{**} = \tau(f),$$

δηλαδή :

$$x^{**}(x^*) = \tau(f)(x^*), \quad \forall x^* \in (L^p)^* \simeq L^q .$$

$1<p<+\infty$

Ξέρουμε ότι κάθε $x^* \in (L^p)^*$ είναι της μορφής T_g για κάποια $g \in L^q$ (όπου $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$), όπου

$$T: L^q \longrightarrow (L^p)^*$$
$$g \longrightarrow T_g, \text{ με}$$
$$T_g(f) = \int fg\,d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

Άρα, ψάχνουμε $f \in L^p$ ώστε $x^{**}(T_g) = \tau(f)(T_g)$ $\forall g \in L^q$,

δηλ. $x^{**} \circ T(g) = T_g(f) = \int fg\,d\mu, \ \forall g \in L^q$.

$L^q \xrightarrow{T} (L^p)^* \xrightarrow{x^{**}} \mathbb{K}$, άρα $x^{**} \circ T \in (L^q)^* \simeq L^p$. Επομένως,

συνεχείς, γρ.

$1<q<+\infty$

πράγματι $\exists\, f \in L^p$ που αναπαριστά το $x^{**} \circ T \in (L^q)^*$, δηλ.

με $$x^{**} \circ T(g) = \int g f \, d\mu \quad \forall g \in L^q.$$

$\blacksquare$

Τώρα συνεχίζουμε με κάποια αρνητικά αποτελέσματα, που θα στηριχτούν σε κάποιες βασικές προτάσεις.

$\longrightarrow$ Παρατήρηση: Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, τότε είναι Banach.

Απόδ.: $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής $\Longrightarrow$ ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(X^{**}, \|\cdot\|)$, ο οποίος είναι Banach

(Ξέρουμε ότι ο $\mathcal{B}(X,Y) := \{ f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y) : f$ γραμμική και φραγμένη$\}$

είναι Banach αν ο $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι Banach. Άρα, ο

$X^{**} = \mathcal{B}(X^*, \underbrace{\mathbb{K}}_{\text{Banach}})$ είναι Banach).

Άρα, είναι Banach και ο $(X, \|\cdot\|)$. $\blacksquare$

→ <u>Άσκηση</u>: Ο $c_{00} := \{$ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ με μόνο πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους$\}$

<u>δεν</u> είναι αυτοπαθής, με οποιαδήποτε νόρμα και αν εφοδιαστεί.

<u>Λύση:</u> $c_{00} = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$e_n := (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{θέση } n}}{1}, 0, 0, \ldots) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα, η $\dim c_{00}$ είναι άπειρη αριθμήσιμη.

Από το Θ. Baire, ο $(c_{00}, \|\cdot\|)$ δεν είναι Banach, για καμία νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00}. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|)$ δεν είναι αυτοπαθής. ■

→ <u>Πρόταση:</u> Αν ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος, τότε ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος.

Αποδ.: Έστω $\tilde{D}^*$ αριθμήσιμο και πυκνό $\subseteq (X^*, \|\cdot\|)$.

Τότε, το $D^* := \left\{ \frac{x^*}{\|x^*\|} : x^* \in \tilde{D}^* \right\}$ είναι αριθμήσιμο

και πυκνό υποσύνολο της S_{X^*}.

Γράφουμε $D^* := \{ x_n^* : n \in \mathbb{N} \}$.

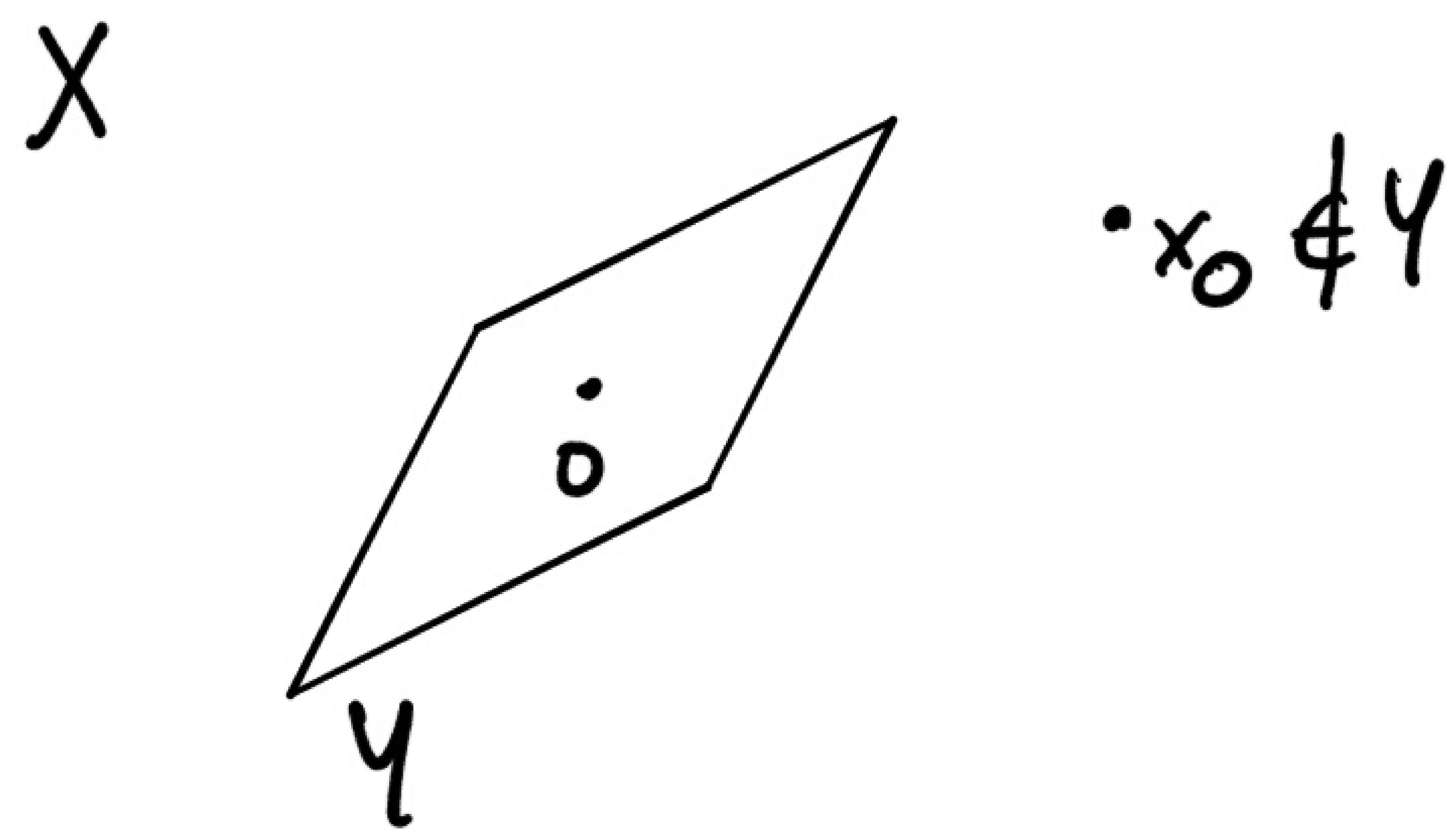
$\forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n^*\| = 1 \longrightarrow \exists \ x_n \in S_X$ ώστε $|x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}$.

έτσι περνάμε
από τον X^* στον X

ΘΔΟ $X = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$ (και άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος).

Πράγματι, έστω ότι $\exists\, x_0 \in X$ με $x_0 \notin Y := \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$.

Ο Y είναι κλειστός $\leq X$, άρα, από Hahn-Banach, $\exists\, x_0^* \in X^*$ με:



αυτά χρειαζόμαστε

- $\|x_0^*\| = 1$, δηλ. $x_0^* \in S_{X^*}$,
- $x_0^*|_Y = 0$, άρα $x_0^*(x_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $x_0^*(x_0) = \operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$

Το άτοπο θα προκύψει από το ότι το x_0^* βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο $x_n^* \in D^*$, άρα τα $\underbrace{x_0^*(x_n)}_{=0}$, $\underbrace{x_n^*(x_n)}_{>1/2}$ θα έπρεπε να είναι περίπου ίσα.

Πράγματι, αφού το D^* είναι πυκνό στην S_{X^*}, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|x_0^* - x_{n_0}^*\| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \Big| \underbrace{x_0^*(x_{n_0})}_{=0} - x_{n_0}^*(x_{n_0}) \Big| < \frac{1}{3} \Longrightarrow |x_{n_0}^*(x_{n_0})| < \frac{1}{3}, \text{ άτοπο}$$

(είναι $> \frac{1}{2}$).

Άρα, $X = Y$. ∎

→ Άσκηση: Ο $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ δεν είναι αυτοπαθής.

Λύση: Έστω ότι είναι. Τότε, $L^1(\mathbb{R}) \simeq (L^1(\mathbb{R}))^{**} \simeq (L^\infty(\mathbb{R}))^*$.

ισομετρικά ισόμορφος

Άρα, αφού ο $L^1(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος, είναι διαχωρίσιμος και ο $(L^\infty(\mathbb{R}))^*$ $\xrightarrow[\text{Πρόταση}]{}$ ο $L^\infty(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο. ■

→ Άσκηση: Οι $L^1([a,b])$, ℓ^1 (εφοδιασμένοι με την 1-νόρμα του ο καθένας) δεν είναι αυτοπαθείς.

→ Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε:

$$(X, \|\cdot\|) \text{ αυτοπαθής} \iff (X^*, \|\cdot\|) \text{ αυτοπαθής.}$$

<u>Απόδ.</u> : $(\longrightarrow)$ Έστω ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής

$\longrightarrow \quad \tau(X) = X^{**}$.

Θέλουμε : $(X^{*}, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής, δηλαδή $\tau(X^{*}) = X^{***}$.

Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$, δηλ. $x_0^{***} : X^{**} \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμική και συνεχής.

Ψάχνουμε $x_0^{*} \in X^{*}$ ώστε $x_0^{***} = \tau(x_0^{*})$,

δηλ. $x_0^{***}(x^{**}) = \tau(x_0^{*})(x^{**}) = x^{**}(x_0^{*}) \quad \forall x^{**} \in X^{**} = \tau(X)$,

<u>ισοδύναμα</u> : $x_0^{***}(\tau(x)) = \tau(x)(x_0^{*}) \quad \forall x \in X$,

δηλ. : $\boxed{x_0^{***} \circ \tau(x) = x_0^{*}(x), \quad \forall x \in X.}$

Το x_0^* που ψάχνουμε είναι ακριβώς το $x_0^{***} \circ \tau$:

$$X \xrightarrow{\tau} X^{**} \xrightarrow{x_0^{***}} \mathbb{K}$$, άρα όντως $x_0^{***} \circ \tau \in X^*$.

συνεχείς, γραμμικές

($\Leftarrow$) Έστω ότι ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, δηλ.

$$\tau(X^*) = X^{***}.$$

ΘΔΟ ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, δηλ. ότι

$$e(X) = X^{**}.$$

Ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι Banach και η $\tau:(X,\|\cdot\|)\longrightarrow(X^{**},\|\cdot\|)$ είναι γραμμική ισομετρία. Άρα, ο $\tau(X)$ είναι κλειστός $\leq X$:

Έστω $\tau(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0^{**}\in X^{**}$, για κάποια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X.

Τότε, $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy στον $(X^{**},\|\cdot\|)$

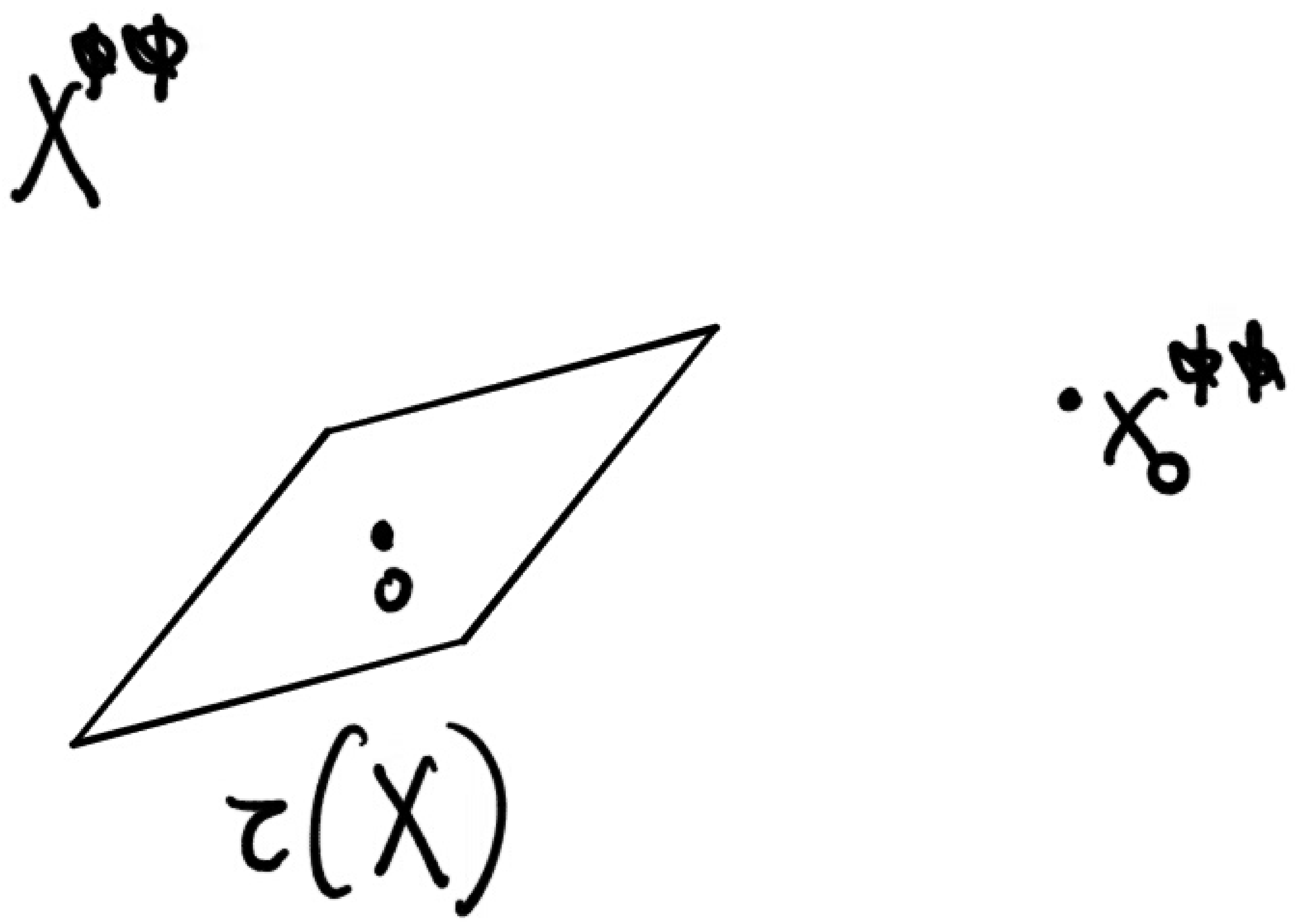
$\xRightarrow{\tau \text{ ισομετρία}}$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy στον $(X,\|\cdot\|)$

$\xRightarrow[\text{Banach}]{(X,\|\cdot\|)}$ $\exists\ x_0\in X:\ x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$

$\xRightarrow{\tau \text{ ισομετρία}}$ $\tau(x_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}\tau(x_0)$. Άρα, $x_0^{**}=\tau(x_0)\in\tau(X)$.

Άρα, έστω ότι $\exists\ x_0^{**} \in X^{**}$ με $x_0^{**} \notin \underbrace{\tau(X)}_{\text{κλειστός} \leq X^{**}}$.

Από Hahn-Banach, $\exists\ \underbrace{x_0^{***}}_{= \tau(x_0^*), \text{ για κάποιο } x_0^* \in X^*} \in X^{***} = \tau(X^*)$, ώστε:



- $\|\tau(x_0^*)\| = 1$, δηλ. $\|x_0^*\| = 1$
- $\tau(x_0^*)|_{\tau(X)} = 0$, δηλ. $\underbrace{\tau(x_0^*)\big(\tau(x)\big)}_{= \tau(x)(x_0^*) = x_0^*(x)} = 0 \ \forall x \in X$ $\Longrightarrow x_0^* = 0$!
- $\tau(x_0^*)\left(x_0^{**}\right) > 0$.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς είναι αδύνατον να ισχύει ότι

$$x_0^* = 0 \quad \text{και} \quad \|x_0^*\| = 1.$$

Άρα, $X^{**} = \tau(X^*)$.

■

→ <u>Άσκηση:</u> Ο $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι αυτοπαθής.

<u>Λύση:</u> $L^\infty(\mathbb{R}) \simeq (L^1(\mathbb{R}))^*$. Άρα, αν ο $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ήταν αυτοπαθής, τότε θα ήταν αυτοπαθής και ο $((L^1(\mathbb{R}))^*, \|\cdot\|)$ $\xrightarrow[\text{Πρόταση}]{}$ θα ήταν αυτοπαθής και ο $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, που δεν ισχύει (τελευταία άσκηση).

■

→ $\boxed{\text{Krein - Milman}}$:

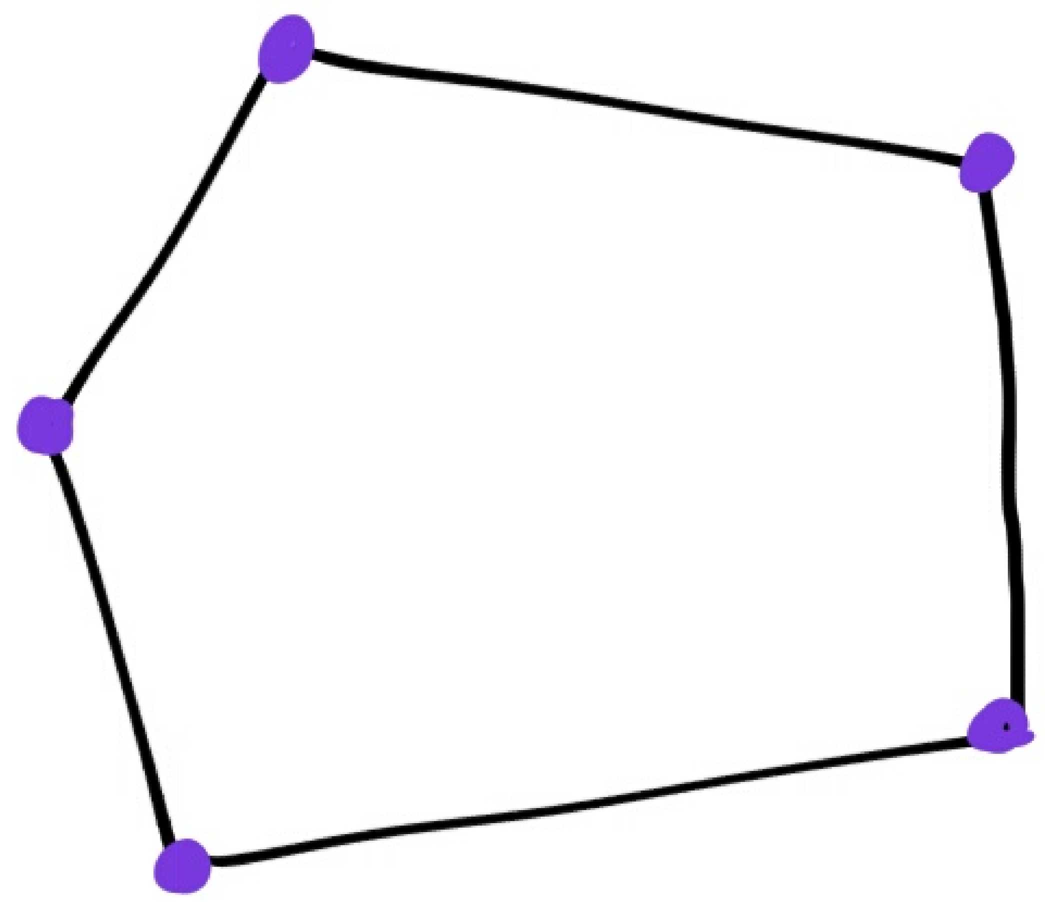
→ Ορισμός : Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και K κυρτό $\subseteq X$.

(α) Ένα $x \in K$ λέγεται ακραίο σημείο του K αν δεν είναι εσωτερικό σημείο ευθύγραμμου τμήματος μέσα στο K (δηλ. αν δεν υλοποιείται ως κυρτός συνδυασμός σημείων του $K \setminus \{x\}$). Δηλ. αν:

$$\left[\ \forall\ y, z \in K \text{ και } \lambda \in (0,1) \text{ με } x = \lambda y + (1-\lambda) z, \text{ έχουμε: } y = z = x.\ \right]$$

Συμβολίζουμε: $ex(K) := \{\text{ακραία σημεία του } K\}$.

π.χ.

$K =$ 

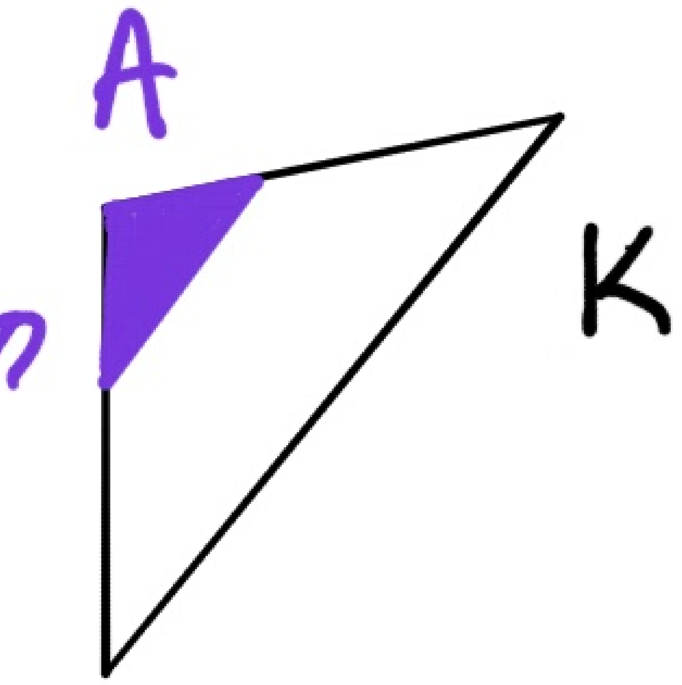
Αν το K είναι κυρτό πολύγωνο, τότε $ex(K) =$ το σύνολο των κορυφών του K.

(β) Έστω $A \subseteq K$. Το A λέγεται ακραίο υποσύνολο του K αν:

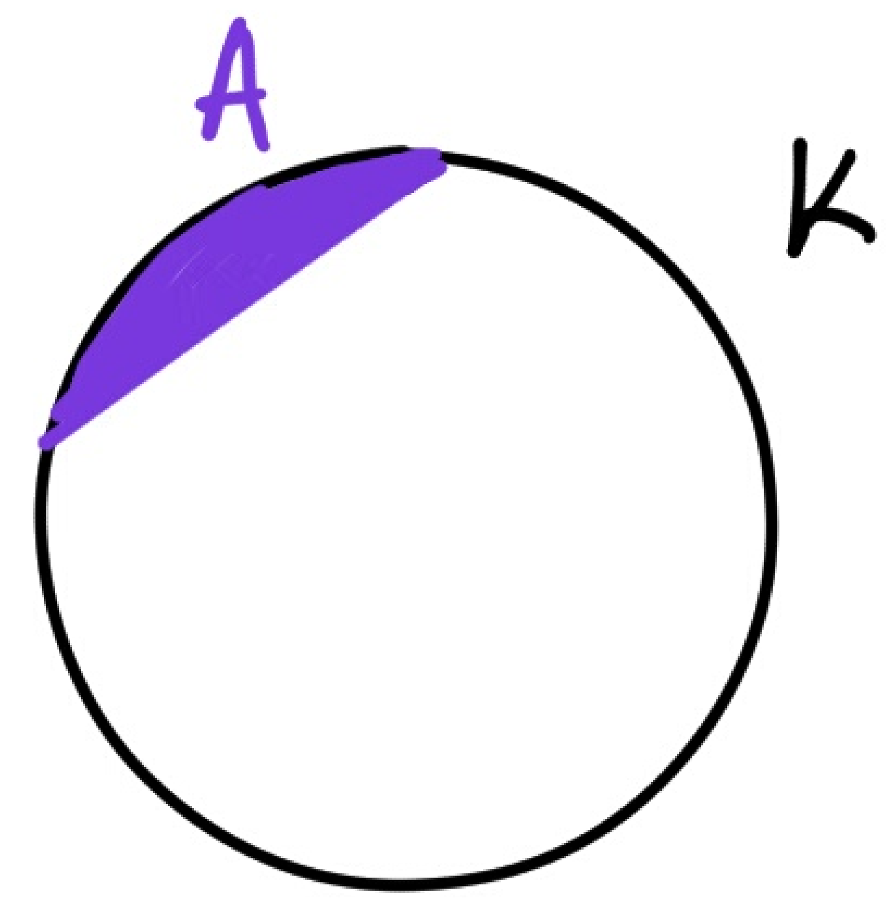
$\forall\, x \in A$ και $\forall\, y, z \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ με $x = \lambda y + (1-\lambda) z$,
έχουμε: $y, z \in A$.

⚠ x ακραίο σημείο του $K \iff \{x\}$ ακραίο υποσύνολο του K.

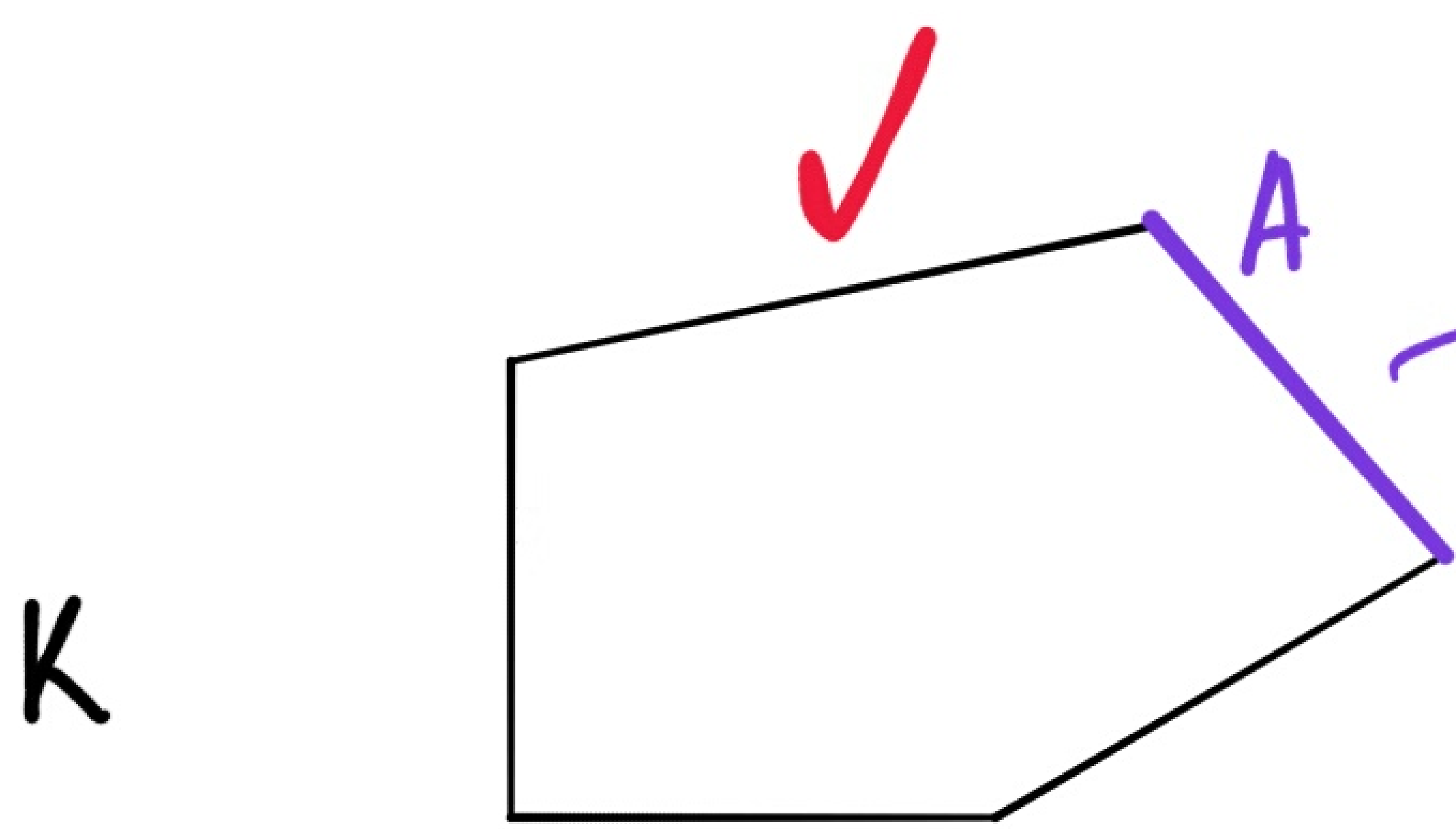
π.χ.:



όχι ακραίο $\subseteq K$



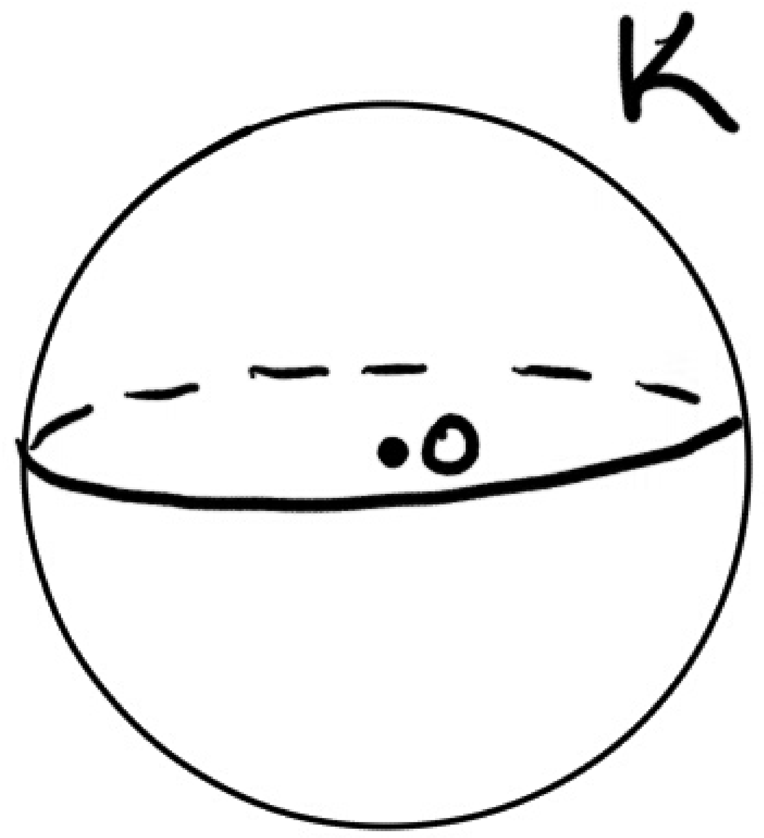
όχι ακραίο $\subseteq K$



κάθε ακμή ενός κυρτού πολυγώνου K είναι ακραίο $\subseteq K$.

→ **Παρατηρήσεις:**

- Στον $\mathbb{R}^n$, για $K := \tilde{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$ έχουμε: $ex(K) = S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$.



- $\forall$ $(X,\|\cdot\|)$, η S_X είναι ακραίο υποσύνολο της $\tilde{B}_X$:

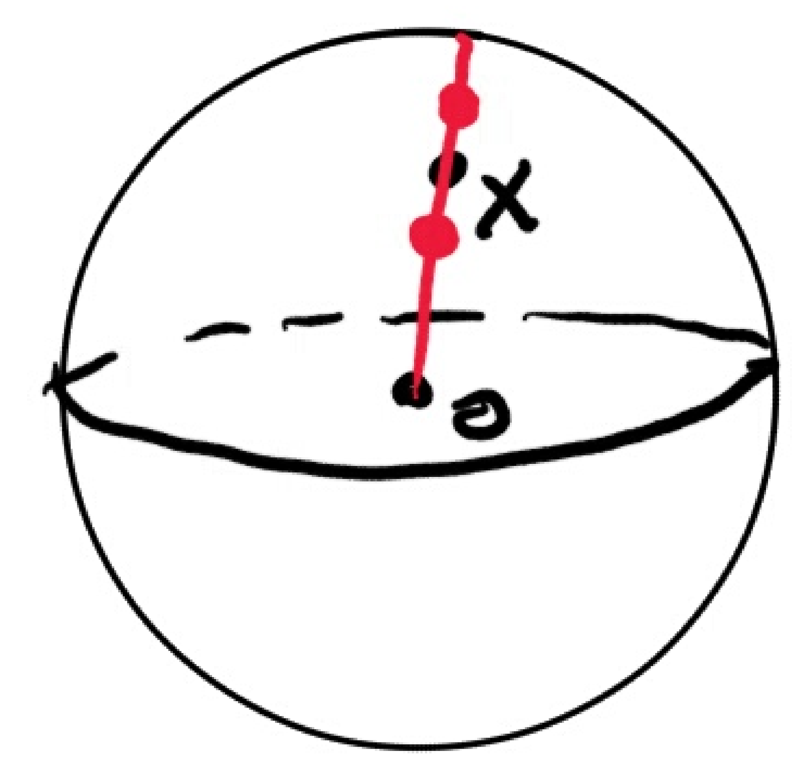
Έστω $x \in S_X$ και $y,z \in \tilde{B}_X$, $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda) z$.

Τότε, $1 = \|x\| \leq \lambda \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + (1-\lambda) \underbrace{\|z\|}_{\leq 1} \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$, άρα έχουμε ισότητα παντού: $\|y\| = \|z\| = 1$, δηλ. $y, z \in S_X$.

- $\forall\ (X, \|\cdot\|)$, $ex(\tilde{B}_X) \subseteq S_X$:

Έστω $x \in \tilde{B}_X \setminus S_X$, δηλ. $\|x\| < 1$. Τότε, το x δεν είναι ακραίο σημείο της $\tilde{B}_X$: Για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, $\|(1-\varepsilon)x\| = (1-\varepsilon)\|x\| < 1$

και $\|(1+\varepsilon)x\| = (1+\varepsilon)\|x\| < 1$,



δηλ. $(1-\varepsilon)x$, $(1+\varepsilon)x \in \tilde{B}_X \setminus S_X$, και $x = \dfrac{(1-\varepsilon)x + (1+\varepsilon)x}{2}$,

κυρτός συνδυασμός των $(1-\varepsilon)x$, $(1+\varepsilon)x$.

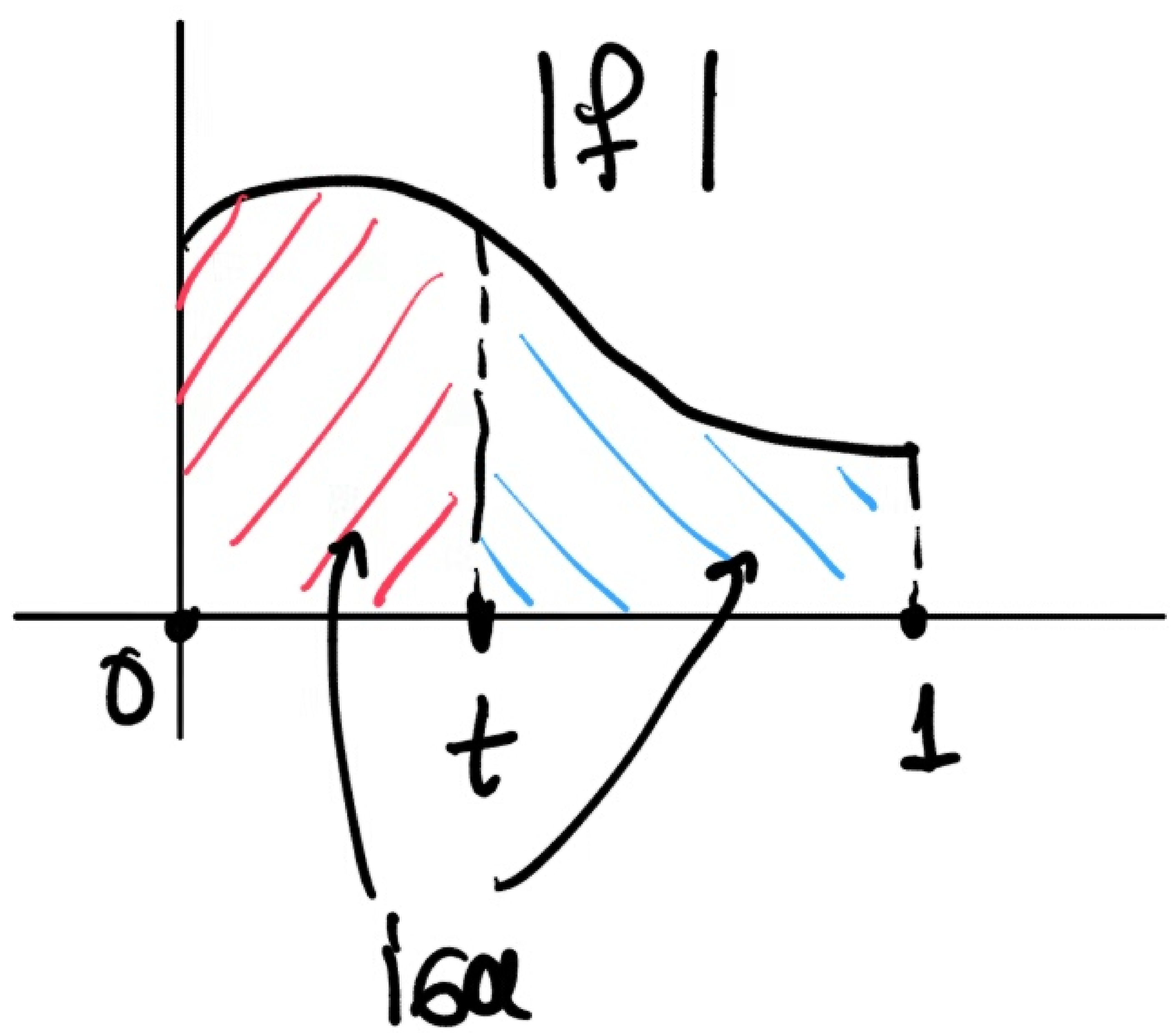
• Υπάρχουν περιπτώσεις $(X,\|\cdot\|)$ όπου $ex(\tilde{B}_X)=\emptyset$:

→ Παράδειγμα 1: Ο $(X,\|\cdot\|)=(L^1([0,1]),\|\cdot\|_1)$ ικανοποιεί:

$$ex(\tilde{B}_X)=\emptyset.$$

Πράγματι: Ξέρουμε ότι $ex(\tilde{B}_X)\subseteq S_X$. Έστω λοιπόν $f\in S_X$, δηλ. $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|\,d\lambda(x)=1$. Θα βρούμε $g,h\in S_X\,(\subseteq \tilde{B}_X)$, με $g,h\neq f$, ώστε $f=\frac{g+h}{2}$:

$\exists \; t \in [0,1]$ ώστε $\displaystyle\int_0^t |f(x)|\, d\lambda(x) = \int_t^1 |f(x)|\, d\lambda(x) = \frac{\|f\|_1}{2} = \frac{1}{2}.$



Ορίζουμε $g := 2 f_{|[0,t]}$

και $h := 2 f_{|[t,1]}$ έχουμε:

$$\|g\|_1 = \|h\|_1 = 1 \;, \quad g, h \neq f \quad \text{και} \quad f = \frac{g+h}{2}.$$

Δηλ., η f είναι κυρτός συνδυασμός δύο στοιχείων της $\widetilde{B}_X$ διαφορετικών από την f. Άρα, $f \notin ex(\widetilde{B}_X)$. Άρα, $ex(\widetilde{B}_X) = \emptyset$. ∎

→ Παράδειγμα 2: Ορίζουμε $c_0 := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$.

Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, όπου, $\forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$,

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Ισχύει ότι: $ex(\tilde{B}_{c_0}) = \emptyset$.

Λύση: Ξέρουμε ότι $ex(\tilde{B}_{c_0}) \subseteq S_{c_0}$. Έστω λοιπόν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{c_0}$. ΘΔΟ $x \notin ex(\tilde{B}_{c_0})$:

$\|x\|_\infty = 1$, άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0}| = 1$.

Επίσης, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, άρα $\exists\, n_1 > n_2$ ώστε $|x_{n_1}| < \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε:

$$y = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, \dots, x_{n_1 - 1}, x_{n_1} + \frac{1}{3}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\right),$$

$$z = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} - \frac{1}{3}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\right).$$

Τότε, $\|y\|_\infty = \|z\|_\infty = |x_{n_0}| = 1$, άρα $y, z \in \tilde{B}_{c_0}$, $y, z \neq x$,

και $x = \dfrac{y+z}{2}$. Άρα, $x \notin \tilde{B}_{c_0}$. Άρα, $ex(\tilde{B}_{c_0}) = \emptyset$. ∎