

Ασκήσεις: Φυλλάδιο 1

Ανάλυση II, 2024-25

Προθεσμία παράδοσης: 5 Μαΐου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω L_0 ο χώρος των Lebesgue-μετρησίμων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (σε αυτό τον χώρο, δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν διαφέρουν μόνο πάνω από σύνολο μέτρου Lebesgue 0). Ορίζουμε την τοπολογία $\mathcal{T}$ στον L_0 , με την ιδιότητα ότι η $\mathcal{B}_0 := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$B_n := \left\{ f \in L_0 : \lambda(\{x \in [0, 1] : |f(x)| > 1/n\}) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

είναι βάση περιοχών του $0 \in L_0$, και η $\mathcal{B}_{f_0} := f_0 + \mathcal{B}_0$ είναι βάση περιοχών της f_0 , για κάθε $f_0 \in L_0$. Δείξτε τα εξής:

- a) Ο $(L_0, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.
 - b) $\text{conv}(B_n) = L_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
 - c) Ο $(X, \mathcal{T})$ δεν είναι τοπικά κυρτός.
 - d) $L_0^* = \{0\}$.
2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό και κυρτό, με $0 \in A$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $p_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$p_A(x) := \inf\{t \geq 0 : x \in tA\}$$

είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, και ότι

$$A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}.$$

3. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a) Έστω $f_n := \chi_{[n, n+1]}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, στον $L^1(\mathbb{R})$, έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{w} 0$.
 - b) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, με $\dim X = +\infty$. Έστω $x_0 \in X$, με $x_0 \neq 0$. Τότε, το σύνολο $\text{span}\{x_0\}$ δεν είναι w -ανοιχτό.
4. Δείξτε ότι κάθε ορθοκανονική ακολουθία σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου συγκλίνει ασθενώς στο 0. (Εδώ εννοούμε ότι η νόρμα που επάγει την ασθενή τοπολογία είναι εκείνη που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.)
5. Έστω $1 < p < +\infty$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
- (i) $f_n \xrightarrow{w} 0$.

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_p < +\infty$, και $\int_A f_n d\lambda \rightarrow 0$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue.

6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με e_n το διάνυσμα του ℓ^2 με n -οστή συντεταγμένη 1 και όλες τις άλλες συντεταγμένες ίσες με 0. Ορίζουμε

$$A := \{e_m + me_n : m < n, m, n \in \mathbb{N}\} \subset (\ell^2, \|\cdot\|_2).$$

Δείξτε ότι $0 \in \overline{A}^w$, αλλά και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A που να συγκλίνει ασθενώς στο 0.

7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Έστω $f : (X, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, κυρτή συνάρτηση (όχι αναγκαστικά γραμμική). Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} x_0$, για κάποιο $x_0 \in X$. Δείξτε ότι $f(x_0) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$.