

Ασκήσεις σε ασθενείς τοπολογίες

1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε τα εξής:
 - a) Η ανοιχτή μοναδιαία μπάλα $B(0, 1)$ του $(X, \|\cdot\|)$ δεν είναι w -ανοιχτή (και άρα, $\mathcal{T}_w \subsetneq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$).
 - b) Η $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι w -συνεχής σε κανένα $x_0 \in X$.
 - c) Κανένας υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση δεν είναι w -ανοιχτός.
2. Έστω $f_n := \chi_{[n, n+1]}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, για κάθε $1 < p < +\infty$, $f_n \xrightarrow{w} 0$ στον $L^p(\mathbb{R})$.
3. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} x$, για κάποιο $x \in X$.
 - a) Δείξτε ότι $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.
 - b) Δείξτε ότι δεν ισχύει αναγκαστικά ότι $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
4. Έστω $1 < p < +\infty$, $y \in \ell^p$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον ℓ^p . Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
 - (i) $x_n \xrightarrow{w} y$.
 - (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty$ και $x_n(k) \rightarrow y(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
5. Σε κάθε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, έχουμε ότι

$$\overline{S_X}^w = \widetilde{B}_X$$

(όπου συμβολίζουμε $S_X := S_X(0, 1)$, $\widetilde{B}_X := \widetilde{B}_X(0, 1)$).