

## Κυρτότητα συναρτήσεων

**Ορισμός:** Έστω  $X$  διανυσματικός χώρος. Μία  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται *κυρτή* αν

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \text{για κάθε } x, y \in X \text{ και } \lambda \in (0, 1). \quad (1)$$

Ενώ η (1) συνεπάγεται ότι

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad (2)$$

η (2) δε συνεπάγεται την (1) - δείτε για παράδειγμα τη συζήτηση [εδώ](#).

Ωστόσο, οι (1), (2) είναι ισοδύναμες όταν υπάρχει κάποια νόρμα  $\|\cdot\|$  στον  $X$  ώστε η  $f : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  να είναι συνεχής. Για την απόδειξη, δείτε τη σελίδα 2 [εδώ](#). (Αν υπάρχει τέτοια  $\|\cdot\|$ , τότε η συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  στην απόδειξη είναι συνεχής, και άρα  $g^{-1}(\{M\})$  κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .)