→ Υπάρχουν <u>πολλές</u> συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ώστε:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}, \ \forall x \in \mathbb{R} \ ? \qquad (*)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: ① Κάθε e^{inx} είναι 2π-περιοδική:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $$e^{in(x+2\pi)} = e^{inx} \cdot \underbrace{e^{in \cdot 2\pi}}_{=1} = e^{inx}.$$

Άρα, αν ισχύει η (*) για κάποια f, τότε και η f είναι 2π-περιοδική.

② • $|e^{inx}| = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

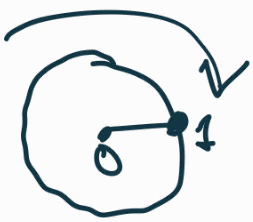
$$e^{i \cdot \underbrace{(nx)}_{\in \mathbb{R}}}$$

$n = 0$: $e^{inx} = e^{i \cdot 0 \cdot x} = 1$.

$n > 0$:

$x \nearrow$

$n < 0$



$x \nearrow$

(3) $e^{inx} = \cos(nx) + i\cdot\sin(nx)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Αρα, αν για καποια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ έχουμε:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx} \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

τότε: $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{=\cos((-n)\cdot x)}$$

$$+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n\cdot i)\cdot \sin(nx) = -\sin((-n)\cdot x)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} (c_n + c_{-n})\cos(nx) + c_0\cdot \underbrace{\cos(0x)}_{=1} +$$

$$+ \sum_{n\in\mathbb{N}} (c_n - c_{-n})\cdot i \cdot \sin(nx)$$

⚠ Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με $a_n\in\mathbb{C}$, λέμε ότι

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = x$ αν: η $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$, με

$$s_N := \sum_{n=-N}^{N} a_n \qquad \forall N\in\mathbb{N},$$

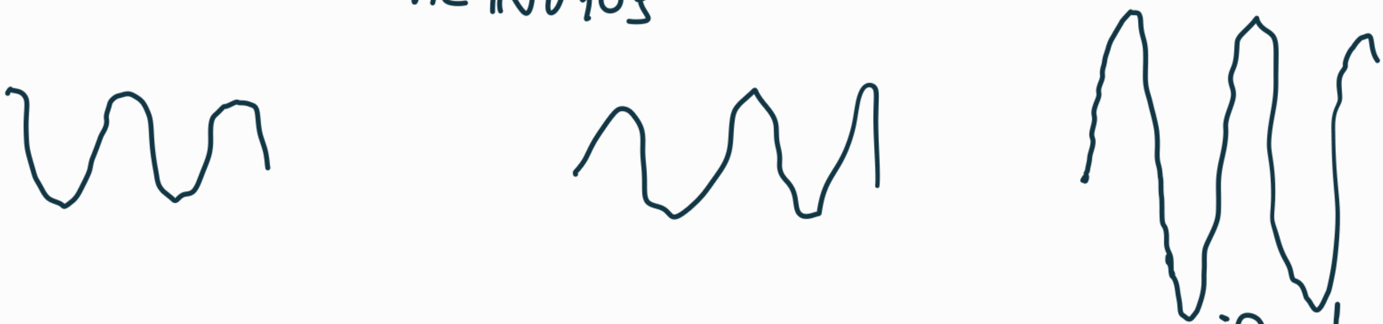
έχει όριο x.

Ενδείξεις ότι η (*) μπορεί να ισχύει:

① Μουσική:

$p(x) :=$ η πίεση που ασκείται στο τύμπανο του αυτιού τη χρονική στιγμή x.

$$p(x) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin(nx).$$



μεγάλο b_n

Γενικά, κάποιος από τους παραπάνω όρους έχει μεγαλύτερο συντελεστή, άρα συνεισφέρει πιο πολύ στο $p(x)$, άρα είναι το κύμα που ακούγεται καλύτερα. Έτσι, ακούμε περισσότερο τη νότα με αυτή τη συχνότητα n.

Ένδειξη ②: Ολόμορφες συναρτήσεις:

Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (ή ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Τότε $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n, \quad \cancel{\forall z \neq 0}$$

$$\underbrace{f(e^{i\theta})}_{g(\theta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (e^{i\theta})^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (e^{in\theta})$$

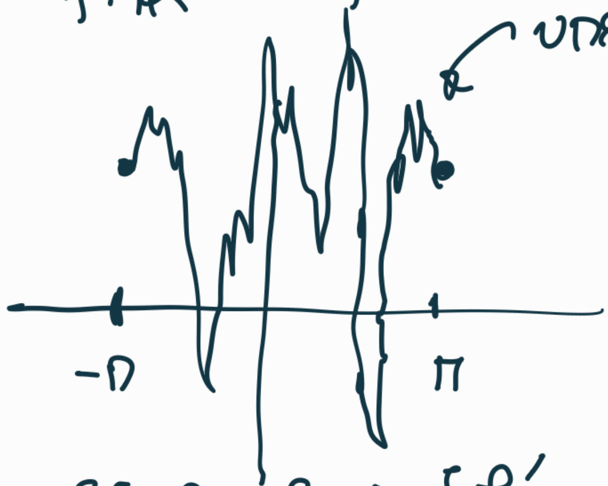
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot e^{in\theta} + \dots, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

→ Τελικά ΘΑΟ

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

για πολλές f, περιλαμβανομένων όλων των 2π-περιοδικών <u>παραγωγίσιμων</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

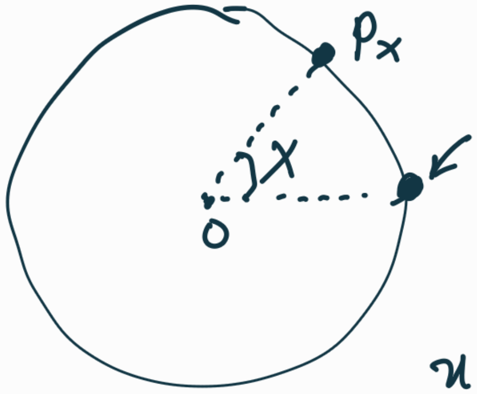


υπεραριθμήσιμη πληροφορία $\longleftrightarrow$ αριθμήσιμη πληροφορία $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$f(-\pi) = f(\pi), \exists f'$.

Πώς ξεκίνησαν όλα? <u>Fourier, 1822:</u>

→ Πώς μεταδίδεται η θερμότητα μέσα σε ένα μεταλλικό δακτύλιο; (μονωμένος δακτύλιος).



$f(x) :=$ η θερμοκρασία στο σημείο p_x τη χρονική στιγμή $t=0$.

$\downarrow$

$u(x,t) :=$ η θερμοκρασία στο σημείο p_x τη χρονική στιγμή t.

Περιμένουμε ότι μετά από πολύ χρόνο, η θερμοκρασία θα είναι παντού ίση με τη μέση τιμή της f. Ξέρουμε:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (\text{ΕΘ})$$

Θέλουμε επίσης: $\boxed{u(x,0) = f(x)}$ (ΑΣ)

Μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε μία $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-περιοδική. Επίσης και κάθε $u(\cdot,t)$ την επεκτείνουμε σε $u(\cdot,t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-περιοδική, $\forall t \geq 0$.

Fourier: Ας ψάχνουμε u που να ικανοποιούν (ΕΘ), της μορφής

$$u(x,t) = \underline{\phi(x)\cdot\psi(t)}, \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall t\geq 0.$$

Μετά θα τις προσθέσουμε, και θα πάρουμε μία πιο γενική λύση της (ΕΘ).

Έστω τέτοια u. Τότε, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\Longleftrightarrow \phi(x)\cdot\psi'(t) = \phi''(x)\cdot\psi(t)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}}_{\text{ανεξ. του } t} = \underbrace{\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}}_{\text{ανεξ. του } x} = \lambda, \ \cancel{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall t\geq 0}$$

, για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$ (σταθερά).

$$\left.\begin{aligned}\psi'(t) &= \lambda\cdot\psi(t)\\ \phi''(x) &= \lambda\,\phi(x)\end{aligned}\right\}\ \text{για ποιές } \phi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ??$$

$$(e^{\lambda t})' = \lambda\cdot e^{\lambda t} \rightsquigarrow \psi(t) = e^{\lambda t}.$$

Οι ϕ που ψάχνουμε είναι 2π-περιοδικές, αφού, $\forall t\geq 0$,

$$\phi(x)\cdot\underbrace{\psi(t)}_{\text{σταθ.}} = u(x,t) \quad 2\pi\text{-περ. ως προς } x.$$

$$\left(\sin(\mu x)\right)'' = \left(\mu\cdot\cos(\mu x)\right)' = -\mu^2\cdot\sin(\mu x)$$

$$\left(\cos(\mu x)\right)'' = \left(-\mu\cdot\sin(\mu x)\right)' = -\mu^2\cos(\mu x)$$

Άρα, ψάχνουμε μ ώστε $\sin(\mu x)$, $\cos(\mu x)$ να είναι 2π-περιοδικές. Αυτό λειτουργεί $\Longleftrightarrow$ $\mu \in \mathbb{Z}$. Άρα,

$$\phi(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad \text{για κάποιο } n \in \mathbb{Z}.$$

Και: $\psi(t) \overset{\lambda = -n^2}{=} c \cdot e^{-n^2 t}$, $\forall t \geq 0$.

Άρα, μια βασική λύση της (ΕΘ) είναι η:

$$c_n e^{-n^2 t} \cdot \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

Άρα, μια γενική λύση της (ΕΘ) είναι η:

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} \cdot \Big(a_n \underbrace{\cos(nx)}_{= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}} + b_n \underbrace{\sin(nx)}_{= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}} \Big)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \geq 0.$$

- Καθώς $t \to +\infty$, $e^{-n^2 t} \longrightarrow 0$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, άρα $u(x,t) \to d_0 \cdot e^{-0^2 \cdot t} \cdot e^{i \cdot 0 \cdot x} = d_0$, σταθερά.

- Θέλουμε όμως να ικανοποιείται και η

(ΑΣ) : $u(x,0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$

δηλ. $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n \cdot e^{-n^2\cdot 0} \cdot e^{inx}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{inx}.$$

Άρα, τίθεται το ερώτημα: ποιές f έχουν αυτή τη μορφή;;.

- Όταν απαντάμε το ερώτημα:

  για ποιές f έχουμε:

  $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

  κοιτάμε 2π-περιοδικές f, και άρα αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$, όπου $f(-\pi)=f(\pi)$.

- Όταν μας απασχολεί το αν

  μέτρο Lebesgue

  $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underbrace{e^{inx}}_{\phi_n}$$ για λ-σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{R}$,

αρκεί να ασχοληθούμε με $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, χωρίς την πρόσθετη ιδιότητα ότι $f(-\pi) = f(\pi)$.

- $\phi_n := e^{inx}$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n \cdot \overline{\phi_m} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx}\, dx$$

$$\langle \phi_n , \phi_m \rangle \text{ στον } L^2([-\pi,\pi]) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\cdot x}\, dx$$

$$\overset{n\neq m}{=} \frac{1}{i(n-m)} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i(n-m)x}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \cdot \cancelto{0}{\left[e^{i\overbrace{(n-m)}^{\neq 0}x} \right]_{-\pi}^{\pi}} = 0$$

- ΘΔΟ στον $\left(L^2([-\pi,\pi]) , \|\cdot\|_2 \right)$, ✓

$$L^2 \ni f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \phi_n$$