

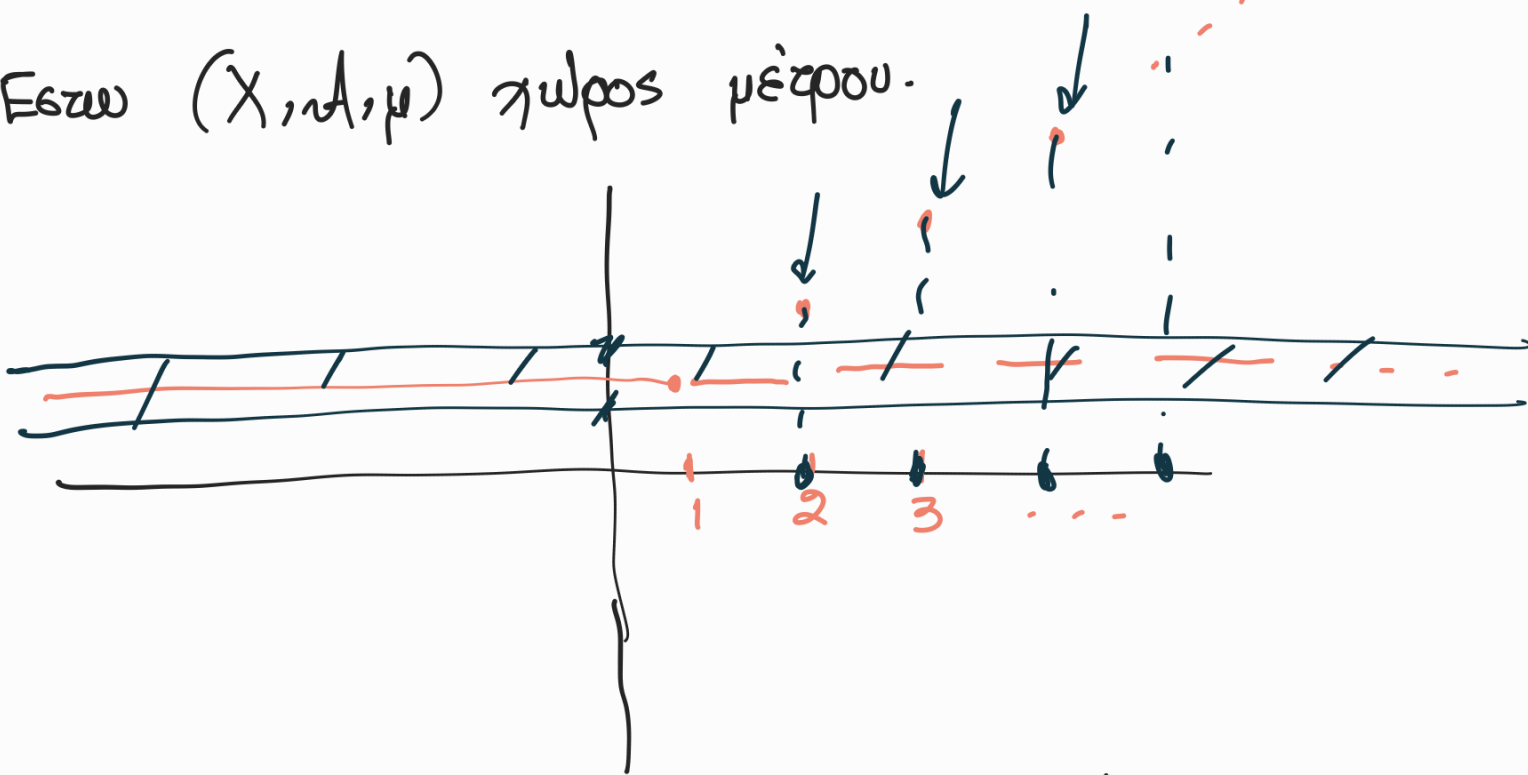
$$\int_X 2^p \cdot (F^p + |f|^p) d\mu = 2^p \cdot \int_X F^p d\mu + 2^p \cdot \int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

'Αρα, and Θ. Kup. Significations,

$$\int_X |t_n - f|^p d\mu \longrightarrow \int_X 0 d\mu = 0.$$

→ Ο χώρος $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$:

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \forall x \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$|f(x)| \leq 1$ για λ -σχεδόν παντού $x \in \mathbb{R}$

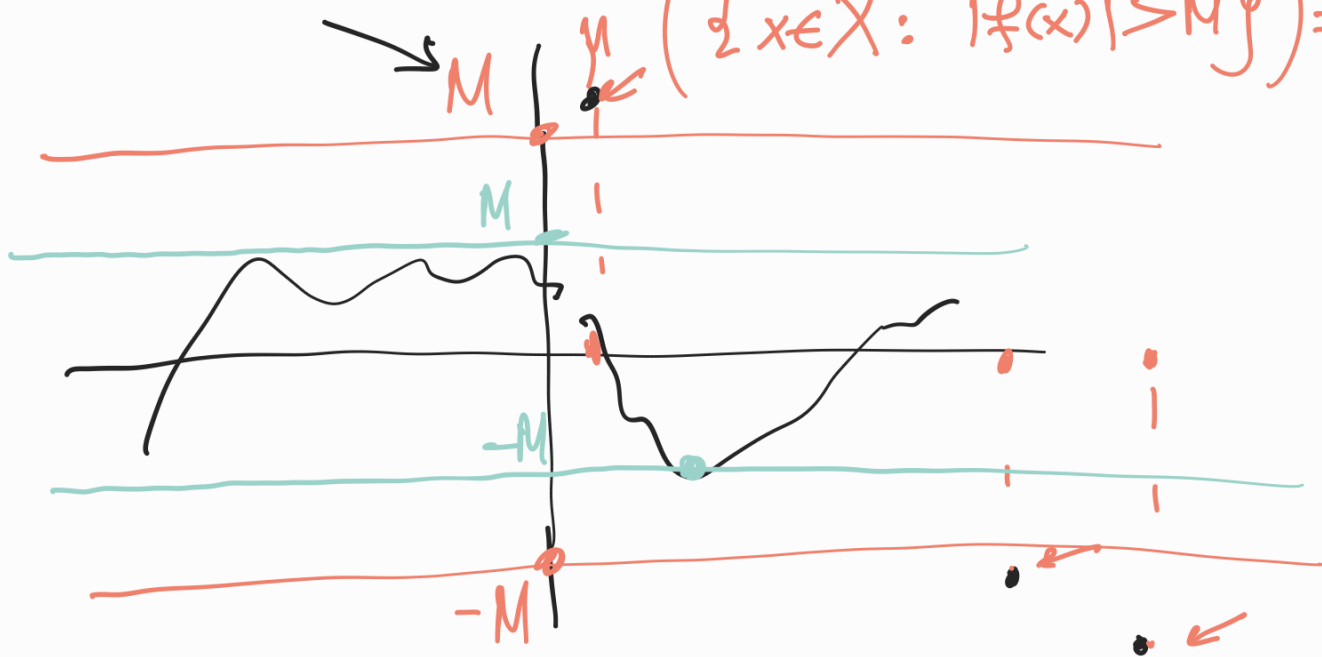
$$(\lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 1\}) \leq \lambda(\mathbb{N}) = 0).$$

→ Ορισμός: $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} :$

f μετρήσιμη και

$\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f| \leq M$ μ -σ.π. $\}$

$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0.$



Όπως πάντα, $f \sim g \iff f = g$ μ -σ.π.

Ορίζουμε, $\forall f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη,

$$\|f\|_\infty := \inf^{(\min)} \{ M \geq 0 : |f| \leq M \text{ } \mu\text{-}\sigma.\pi. \}$$

Μια εύκολη $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \iff \|f\|_\infty < +\infty.$

Λέμε ότι ο $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ο χώρος

των ουσιωδώς φραγμένων (μέτρησιμων)

$f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$. Συμβολίζουμε

$$\|f\|_{\infty} =: \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

(Γενικώς: $\operatorname{ess\,sup} |f| \leq \sup |f|$).

Πρόταση: $0 \leq L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι διανυσματικός χώρος, και $(L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_{\infty})$ είναι χώρος με νόρμα.

Απόδ. (Κάποια σημεία): Αν $f, g \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\Rightarrow f+g \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) :$$

$$f, g \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{*} \quad |f| \leq \|f\|_{\infty} \quad \mu\text{-}\sigma.\pi.; \\ |g| \leq \|g\|_{\infty} \quad \mu\text{-}\sigma.\pi. \end{array}$$

$$\text{Άρα: } |f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \quad \mu\text{-}\sigma.\pi. :$$

$$\textcircled{*} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(\{ |f| > \|f\|_{\infty} \}) = 0 \\ \mu(\{ |g| > \|g\|_{\infty} \}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \left(\underbrace{\{ |f| > \|f\|_{\infty} \} \cup \{ |g| > \|g\|_{\infty} \}}_{=A} \right)$$

$$\leq 0+0=0.$$

Άρα, στον $X \setminus A$, $|f| \leq \|f\|_\infty$

και $|g| \leq \|g\|_\infty$,

άρα $|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,
 στον $X \setminus A$.

Άρα, αφού $\mu(A)=0$, έχουμε:

$$\boxed{|f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \mu\text{-σ.π.}}$$

Δείχνουμε λοιπόν ότι, αν $f, g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\text{τότε } |f+g| \leq \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\in \mathbb{R}} \quad \mu\text{-σ.π.}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } \|f+g\|_\infty &:= \min \{ M \in \mathbb{R} : |f+g| \leq M \text{ } \mu\text{-σ.π.} \} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Άρα, $\|\cdot\|_\infty$ ικανοποιεί την τριγωνική
 ανισότητα.

→ Ειδικές περιπτώσεις του $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$:

① $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$. (ν : μέτρο
αριθμών)

$$L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ~~μετρήσιμη~~ } \}$$

$$\text{και } \exists M \in \mathbb{R} \text{ ώστε } |f| \leq M \quad \left. \begin{array}{l} \text{ν-σ.π.} \\ \text{παινού} \end{array} \right\} \quad \text{✓}$$

$$f \sim g \stackrel{\text{op}}{\iff} f = g \quad \text{ν-σ.π.}$$

$$\iff \nu(\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}) = 0$$

$$\iff \nexists n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)$$

$$\iff f(n) = g(n), \forall n \in \mathbb{N} \iff f = g \quad \text{πανεως.}$$

$$|f| \leq M \quad \text{ν-σ.π.} \iff \nu(\{n \in \mathbb{N} : |f(n)| > M\}) = 0$$

$$\iff \{n \in \mathbb{N} : |f(n)| > M\} = \emptyset$$

$$\iff |f(n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff |f| \leq M \quad \text{πανεως.}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) &= \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ φραγμένη} \} \\ &= \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \\ &\quad \text{και } \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

$$= \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \}$$

= ο χώρος των φραγμένων
ακολουθιών (μικροδικών) = l^∞

και: $\forall f \in L^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$,

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \in \mathbb{R} : |f| \leq M \underbrace{\nu\text{-}\sigma.\pi.}_{\text{παστού}} \}$$

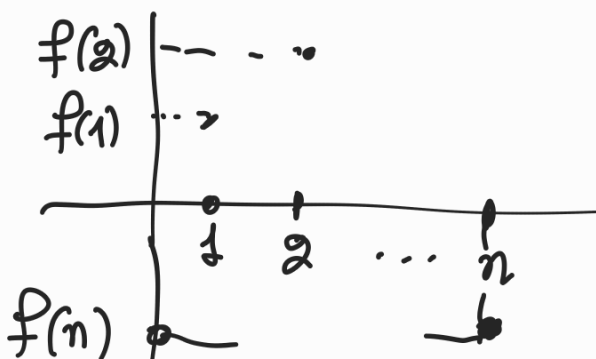
$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|, \quad \text{δηλ.}$$

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad \text{, } \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty.$$

Συστήσση διαλείμματος :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$



$$f \cdot \chi_{\{1\}} = f(1) \cdot \chi_{\{1\}}$$

$$f \cdot \chi_{\{1,2\}} = f(1) \cdot \chi_{\{1\}} + f(2) \cdot \chi_{\{2\}}$$

$$\vdots$$

$$f \cdot \chi_{\{1,2,\dots,n\}} =$$

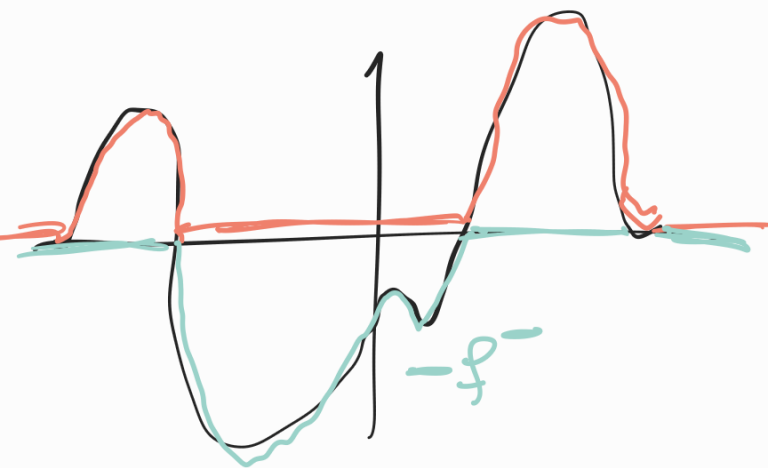
$$S_n = f(1) \chi_{\{1\}} + \dots + f(n) \cdot \chi_{\{n\}}$$

$$\int S_n d\nu = f(1) \cdot \nu(\{1\}) + \dots + f(n) \cdot \nu(\{n\})$$

$$= f(1) + \dots + f(n)$$

$$= n\text{-οστος } \mu\epsilon\rho\iota\kappa\omicron\varsigma \text{ \u0391}\u03b4\rho\rho\iota\sigma\mu\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$



$$f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f^+ = f \chi_{\{f > 0\}} \geq 0$$

$$f^- = -f \chi_{\{f < 0\}} \geq 0,$$

$$f = f^+ - f^-$$

Άσκηση: Έστω $f: (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) \rightarrow \mathbb{R}$

ώστε η f να είναι οριστηνη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \nu < +\infty.$$

ΝΑΟ:

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$$

$\textcircled{2}$ Χρησιμοποιώντας το $\ominus$ -Κριτ. Σωζήσιον, $f(n) = a_n$ $\forall n$

ΝΑΟ αν $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακθ. στο $\mathbb{R}$

ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

είναι το ίδιο με όποια σειρά και αν προβέσουμε.

→ Άλλη ειδική περίπτωση L^∞ :

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = \left(\overset{[a,b]}{[0,1]}, \overset{[a,b]}{\mathcal{L}([0,1])}, \eta \right)$$

$$L^\infty([0,1]) := L^\infty \left(\overset{[a,b]}{[0,1]}, \overset{[a,b]}{\mathcal{L}([0,1])}, \eta \right)$$

$$= \{ f : \underset{[a,b]}{[0,1]} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ Lebesgue-} \\ \text{μετρήσιμη} \}$$

$$\text{και } \exists M \in \mathbb{R} \text{ ώστε } |f| \leq M \text{ η-σ.π.} \}$$

$$\text{όπου } f \sim g \iff f = g \text{ η-σ.π. στο } [0,1]$$

Παρατήρηση: $C(\overset{[a,b]}{[0,1]}) = \{ f : \overset{[a,b]}{[0,1]} \rightarrow \mathbb{C} : \\ f \text{ συνεχής} \}$:

$$C(\overset{[a,b]}{[0,1]}) \subseteq L^\infty(\overset{[a,b]}{[0,1]}): \text{ Έστω } f : \overset{[a,b]}{[0,1]} \rightarrow \mathbb{C}$$

συνχής. Τότε, είναι φραγμένη (επειδή

$\overset{[a,b]}{[0,1]}$ συμπαγές). Άρα, $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$|f| \leq M \text{ (παιράει στο } \overset{[a,b]}{[0,1]})}. \text{ Άρα,}$$

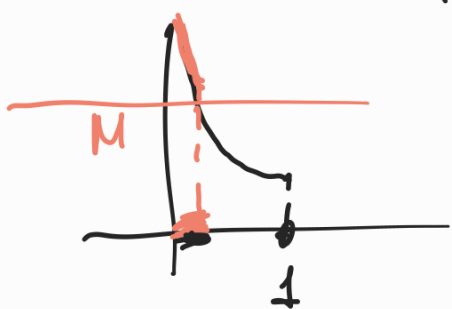
$$f \in L^\infty(\overset{[a,b]}{[0,1]}).$$

$$\triangle ! \quad C((0,1]) := \{ f: (0,1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ συνεχής} \}$$

$$\underline{\Delta\epsilon\iota\tau\epsilon} \text{ ισχύει ότι } C((0,1]) \subseteq L^\infty((0,1])$$

$$\text{Η } f: (0,1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1]$$

είναι συνεχής αν και μόνο αν $\nexists M \in \mathbb{R}$ ώστε:



$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq M \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν} \\ \text{κάθε } x \in (0,1].$$

$$\left(\frac{1}{x} > M \iff x < \frac{1}{M} \iff x \in \left(0, \frac{1}{M}\right), \right. \\ \left. \text{και } \lambda\left((0, 1/M)\right) = \frac{1}{M} > 0 \right).$$

→ Ειδική περίπτωση: $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$:

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ μετρήσιμη}$$

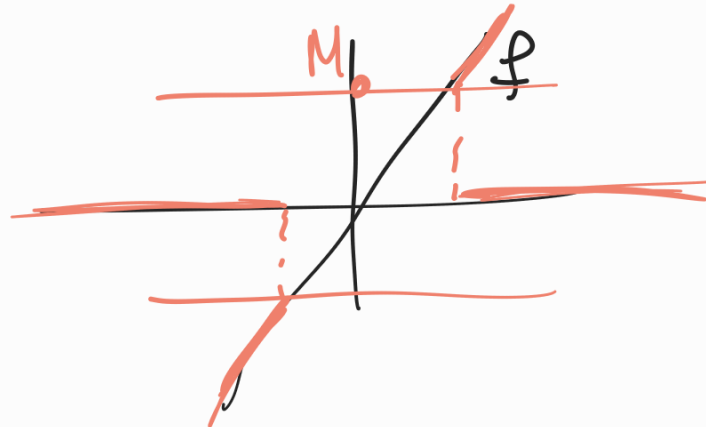
$$\text{και } \exists M \in \mathbb{R} : |f| \leq M \text{ } \lambda\text{-σ.χ.} \} \sim$$

$$\text{όπου } f \sim g \iff f = g \text{ } \lambda\text{-σ.π.}$$

$$\text{Ο } C(\mathbb{R}) \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R}) \quad (f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}).$$

Η f είναι συνεχής, αλλά όχι οβιωδώς

φραγμένη).



Θεώρημα: $C(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη: Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον $(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_\infty)$. (Ανλ.: Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0, \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.)

$\forall$ ζεύγος $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\underbrace{\|f_n - f_m\|_\infty}_{\in L^\infty} \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

δηλ.: $\mu \left(\underbrace{\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}}_{A_{(n,m)}} \right) \stackrel{\mu-\sigma.p.,}{=} 0$

Άρα, το $A := \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} A_{(n,m)}$ ικανοποιεί:

$$\mu(A) = 0.$$

Και, $\forall x \in X \setminus A$, ισχύει ότι

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

Άρα: Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0$:

$$\forall n, m \geq n_0,$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

$$\forall x \in X \setminus A$$

Άρα, $\forall x \in X \setminus A$, η $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ (ακολ. μιγαδικών αριθμών) είναι Cauchy στον $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Ο $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ είναι χώρος Banach, άρα η $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο μιγαδικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $f(x)$ ($\in \mathbb{C}$).

Δείχνουμε λοιπόν ότι $\exists f: X \rightarrow \mathbb{C}$
ώστε $f_m(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus A$
(δηλ. $f_m \rightarrow f$ κ.σ. μ-σ.π.)

Τώρα θα δούμε $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, και

$$f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) :$$

$$\textcircled{*} \quad \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \quad f_m(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in X \setminus A \quad \forall n \geq n_0,$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X \setminus A. \quad \text{Άρα:}$$

$$\bullet \quad |f_n - f| \leq \varepsilon \quad \mu\text{-}\sigma.\pi. \quad (\forall n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty := \min \{ M \in \mathbb{R} : \\ |f_n - f| \leq M \quad \mu\text{-}\sigma.\pi. \} \\ \leq \varepsilon.$$

Άρα το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

• $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$: Θυμηθείτε ότι ο $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι διανυσματικός χώρος. Άρα $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \|f_{n_1} - f\|_\infty < +\infty \Rightarrow f_{n_1} - f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$$

$$\text{Και: } f_{n_1} \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu).$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_{n_1} - (f_{n_1} - f)}_{= f} \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu).$$



→ Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, καθώς το p αλλάζει;

Απάντηση: Εξαρτάται από τον $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

→ Μας ενδιαφέρει η Hölder:

→ Πρόταση: Έστω $1 \leq p \leq \infty$, και $p' : \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
 $(p' = \frac{p}{p-1} \in [1, \infty])$

Τότε, $\forall f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμες,

$$\left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right| \leq \int_X |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'}$$

αν $\int_X |f \cdot g| \, d\mu < +\infty$ (που ισχύει εφόσον
αν $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$,
 $g \in L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$).

→ Πρόταση: Αν $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, τότε,

$\forall f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

Απόδ.: $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu$

$$\stackrel{q/p \geq 1}{\leq} \left(\int_X \left(|f|^p \right)^{q/p} \, d\mu \right)^{p/q} \cdot \left(\int_X 1^{q/(q-p)} \, d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \underbrace{\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{+\infty}$$

① Λήρωι πεπερασμένου μέτρου:

→ Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $\mu(X) < +\infty$.

Τότε, $\forall 1 \leq p \leq q \leq +\infty$,

$$L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Μάλιστα: $\exists C_{p,q} \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\|f\|_p \leq C_{p,q} \cdot \|f\|_q.$$

Ανδ: $C_{p,q} = \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < +\infty$.

Άρα: αν $f \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \|f\|_q < +\infty$

$$\Rightarrow C_{p,q} \|f\|_q < +\infty$$

$$\Rightarrow \|f\|_p < +\infty \Rightarrow f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

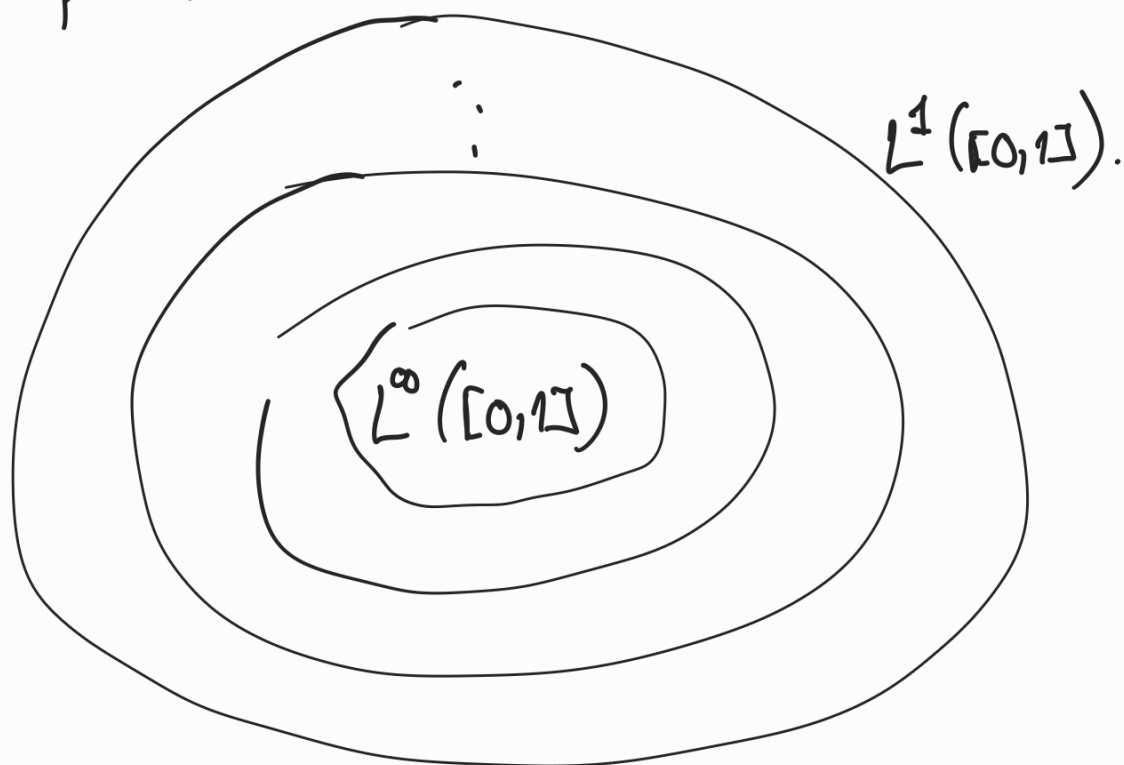
→ Παράδειγμα: $L^p([0,1])$: $\mathcal{N}([0,1]) = 1$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_q, \quad \forall 1 \leq p \leq q \leq +\infty.$$

Ανλ: $L^q([0,1]) \subseteq L^p([0,1])$

και: $\|f\|_p \nearrow$ καθώς $p \uparrow$.

⚠ $L^1([0,1])$ περιέχει όλους τους $L^p([0,1])$,
 $\forall p \geq 1$.



II) Χώροι ακολουθιών ℓ^p : Ισχύει το ανάλογο...

→ Πρόταση: $\forall 1 \leq p \leq q \leq +\infty$, έχουμε:
 $\ell^p \subseteq \ell^q$. Μάλιστα,

$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στο $\mathbb{C}$,

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_q \leq \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p$$

Ανλ: $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p \downarrow$ καθώς $p \uparrow$.

Ανάλυση: Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Περιπινωσθ $p < q \leq +\infty$:

Θέλουμε: $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$ $q > p$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^q \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{q/p}$ $q > p$

$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^k |a_n|^q \leq \left(\sum_{n=1}^k |a_n|^p \right)^{q/p}$

(π.χ. : $p=1, q=2$: Θέλω:

$$\sum_{n=1}^k |a_n|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^k |a_n| \right)^2 \quad \checkmark$$

$$a^2 + b^2 \leq (a+b)^2 \quad \checkmark \quad (a, b \geq 0)$$

$\forall x_1, \dots, x_n \geq 0, \quad \forall a \geq 1,$

$$x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^a$$

Άρα, $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^k |a_n|^q = \sum_{n=1}^k |a_n|^{p \cdot \frac{q}{p}}$ $\frac{q}{p} > 1$

$\leq \left(\sum_{n=1}^k |a_n|^p \right)^{q/p}$ $x_n \geq 0$

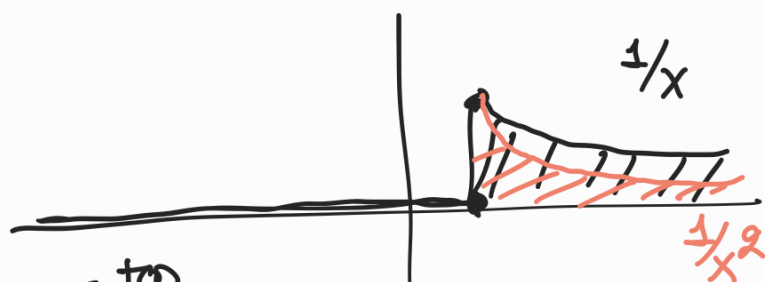
(II) Οι χώροι $L^p(\mathbb{R})$: Δεν ισχύει είναι
and τα να περιέχονται: $\forall 1 \leq p \neq q \leq +\infty$,

$$L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad L^q(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R}).$$

Εξισή περιπτώσεις: $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$:

Ψάχνουμε: $f \in L^1(\mathbb{R})$ αλλά $f \notin L^2(\mathbb{R})$,
και $g \in L^2(\mathbb{R})$ αλλά $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

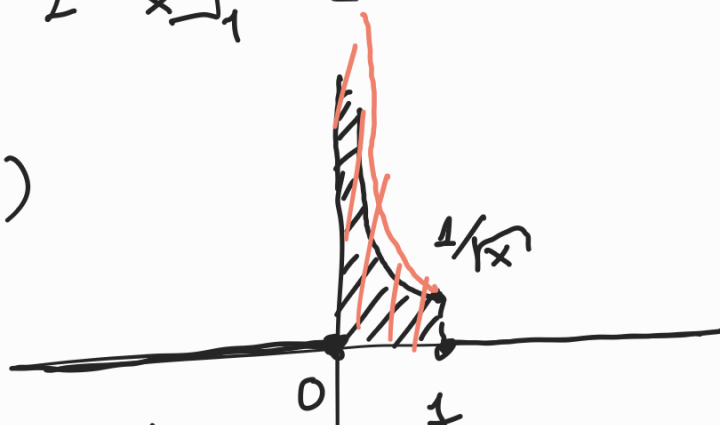
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^2 d\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1 < +\infty.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2 < +\infty.$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = +\infty.$$

⚠ Σε όλες όμως αυτές τις περιπτώσεις:
(κατηγορίες I, II, III)
αν $1 \leq p \neq q < \underbrace{+\infty}_{\text{ιδιαιτερος...}}$, ισχύει:

$$\ell^p \cap \ell^q \text{ πυκνός στον } (\ell^q, \|\cdot\|_q),$$

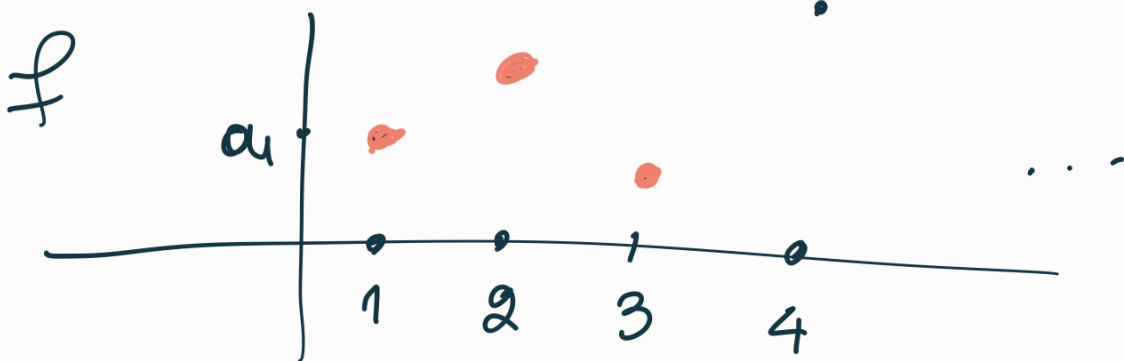
$$L^p([0,1]) \cap L^q([0,1]) \text{ πυκνός στον } (L^q([0,1]), \|\cdot\|_q),$$

$$L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \text{ πυκνός στον } (L^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q).$$

(Διάστημα)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \chi_{\{a_n\}}$$



$$s_n \rightarrow f$$

$$\begin{aligned} \text{Και: } \forall k \in \mathbb{N}, \quad |s_k| &= |a_{n(1)} + a_{n(2)} + \dots + a_{n(k)}| \\ &\leq |a_{n(1)}| + \dots + |a_{n(k)}| \leq |f| \end{aligned}$$

και

$$\int_N |f| d\nu < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

Αρα,

$$\int_N s_k d\nu \rightarrow \int_N f d\nu$$

$\underbrace{N}_{\in \mathbb{R}}$

$$a_{n(1)} + \dots + a_{n(k)}$$



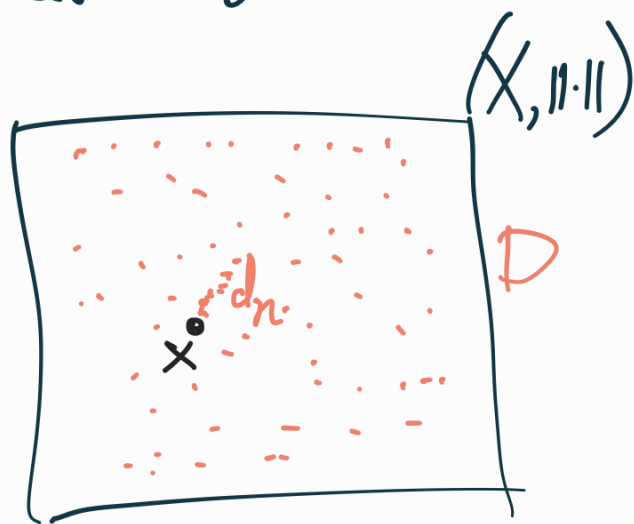
(μέλος διαλλήματος)

→ Πυκνότητα:

Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Ένα υποσύνολο του D του X λέγεται πυκνό στον $(X, \|\cdot\|)$ αν: $\bar{D} = X$.

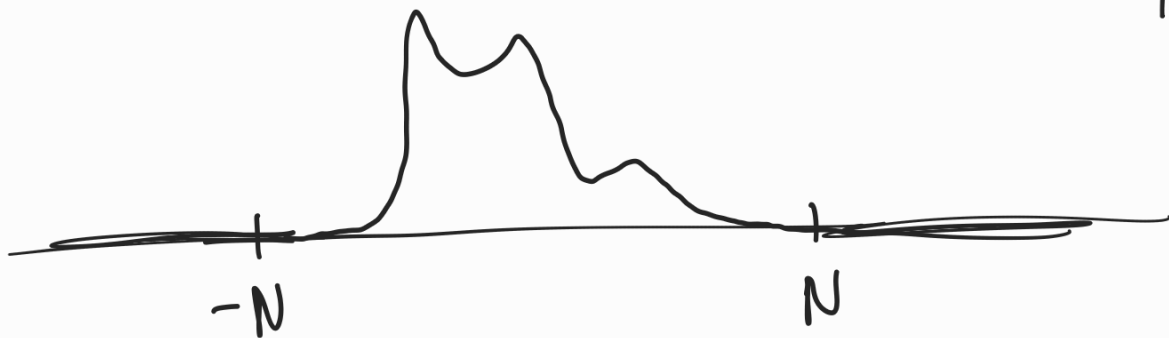
Αντ. αν: $\forall x \in X$,
υπάρχει ακολ. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$
στο D , με $\|d_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.



$$K = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

$$\bullet L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow K : f \text{ Leb. μετρήσιμη, } \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda < +\infty \right\} / \sim$$

- $C_c(\mathbb{R}) := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ συνεχής} \\ \text{και } \exists N \geq 0 \text{ ώστε } |f(x)| = 0 \\ \forall |x| > N \}$



(= ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φέρρα).

(! $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$)

- $\text{Simple}(\mathbb{R}) := \{ s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : s \text{ απλή} \}$.

$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ απλή σημαίνει ότι

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i}, \quad \text{για κάποιους } n \in \mathbb{N}, \\ a_i \in \mathbb{K}, \quad A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

$$= \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}, \quad \text{για κάποιους } m \in \mathbb{N}, \\ b_i \in \mathbb{K}, \quad B_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\ \text{με } B_1, B_2, \dots, B_m \text{ γένα}$$