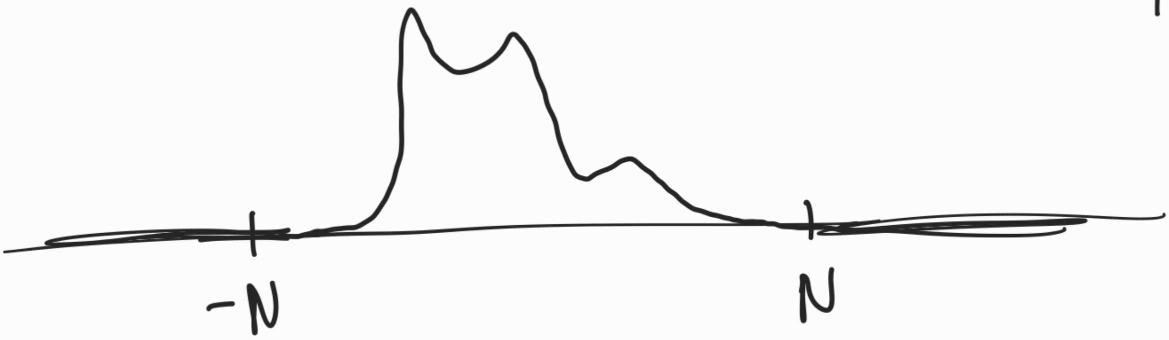
- $C_c(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} :$ f συνεχής και $\exists\, N \geq 0$ ώστε $|f(x)| = 0 \ \forall |x| > N \}$



(= ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα).

(⚠ $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0 \}}$)

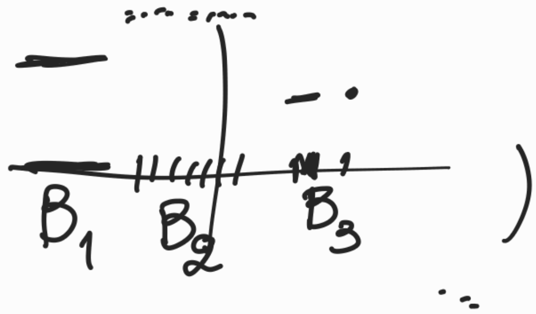
- $\text{Simple}(\mathbb{R}) := \{ s : \mathbb{R} \to \mathbb{K} :$ s απλή$\}$.

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ απλή σημαίνει ότι

$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$, για κάποια $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{K}$, $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

($= \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathbb{K}$, $B_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, με $B_1, B_2, \dots, B_m$ <u>ξένα</u>)

$$= \begin{cases} b_1, & x \in B_1 \\ b_2, & x \in B_2 \\ \vdots & \\ b_m, & x \in B_m \end{cases}$$



<u>Παρατήρηση</u>: $\int_{\mathbb{R}} |s|^p \, d\lambda = |b_1|^p \cdot \lambda(B_1) + \ldots + |b_m|^p \cdot \lambda(B_m) < +\infty$

$\Longleftrightarrow \lambda(B_i) < +\infty \quad \forall \, i = 1, \ldots, m$ (με $b_i \neq 0$).

π.χ. η $s = \chi_{\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Q}\}}$ δεν ανήκει στον $L^p(\mathbb{R})$, για κανένα $1 \leq p \lneq +\infty$.

Άρα, $\mathrm{Simple}(\mathbb{R}) \not\subseteq L^p(\mathbb{R})$.

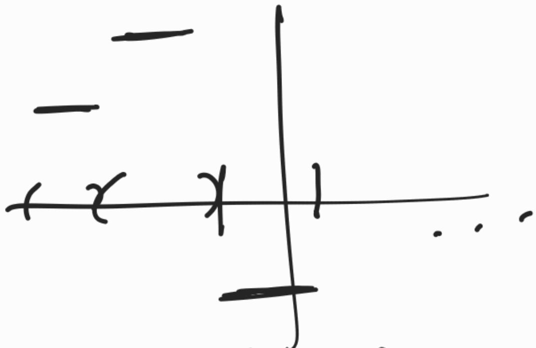
- $\mathrm{Step}(\mathbb{R}) := \{ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \ : \ \ell$ κλιμακωτή $\}$.

Μια $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ λέγεται <u>κλιμακωτή</u> αν

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \chi_{\Delta_i},$$

για κάποια $d_i \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, Δ_i φραγμένο διάστημα ($[a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(a,b]$), $\forall \, i$.

$\left(= \sum_{i=1}^{m} \tilde{d}_i \cdot \chi_{\tilde{A}_i} \right.$, για κάποια $d_i \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, $\tilde{A}_i$ φραγμένα διαστήματα <u>ξένα ανά 2</u>$\left.\right)$.



<u>Παρατήρηση</u>: $Step(\mathbb{R}) \subseteq Simple(\mathbb{R})$,
$Step(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 \leq p \lneq +\infty$.

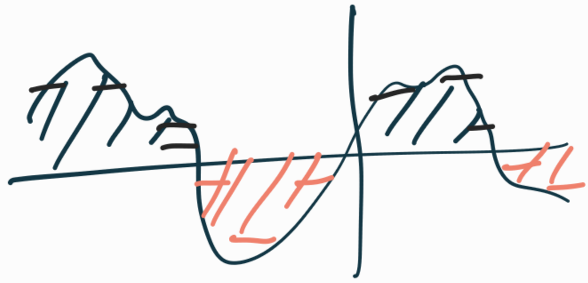
→ <u>Πρόταση</u>: Οι χώροι $Simple(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $Step(\mathbb{R})$, $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνοί στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $\forall\, 1 \leq p \lneq +\infty$.

<u>Απόδειξη</u>: <u>Βήμα 1</u>: $Simple(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

<u>Στόχος</u>: $\forall\, f: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $\forall \varepsilon > 0$, θέλουμε να βρούμε απλή $s: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ με $\|s - f\|_p < \varepsilon$.

Αρκεί να δειχθεί αυτό για $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Αρκεί να θεωρήσουμε $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$.



Έστω τέτοια f και $\varepsilon > 0$.

Υπάρχει ακολ. $(s_n)_n$ απλών $s_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

με: $0 \leq s_n \nearrow f$ κ.σ. (Στόχος: $\|s_n - f\|_p \to 0$, δηλ. $\int |s_n - f|^p d\lambda \searrow 0$)

Άρα:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_n^p \leq f^p$ $\left(\Rightarrow \int |s_n|^p d\lambda \leq \underbrace{\int |f|^p d\lambda}_{< +\infty} \right)$ (*)

(2) $|s_n - f|^p = (f - s_n)^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ κ.σ. .

και $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n - f|^p \leq \ldots \leq g$,

για κάποια g με $\underbrace{\int |g| d\lambda}_{< +\infty}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p$$
$$\leq (2 \cdot \max\{|s_n|, |f|\})^p = 2^p \cdot \max\{|s_n|^p, |f|^p\}$$
$$\leq 2^p \cdot (|s_n|^p + |f|^p)$$
$$\leq 2^p \cdot 2|f|^p = 2^{p+1} \cdot |f|^p,$$

και $\int 2^{p+1} |f|^p d\lambda = 2^{p+1} \cdot \int |f|^p d\lambda < +\infty$.

Άρα, από Θ. Κυρ. Σύγκλισης,

$\int |s_n - f|^p \, d\lambda \longrightarrow 0$, δηλ. $\|s_n - f\|_p \to 0$.

Άρα, για το $\varepsilon > 0$ που επιλέξαμε,

$\exists \ n_0 \in \mathbb{N} : \quad \|s_{n_0} - f\|_p < \varepsilon$.

(*)

Και: η $s_{n_0} \in \text{Simple}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

$$\left(\text{η} \quad s_{n_0} = \underbrace{(s_{n_0} - f)}_{\in L^p} + \underbrace{f}_{\in L^p} \in L^p \right).$$

Άρα, $\text{Simple}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

<u>Βήμα 2:</u> $\text{Step}(\mathbb{R})$ πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

Αρκεί ΝΔΟ $\text{Step}(\mathbb{R})$ πυκνό στον

$\boxed{\text{Simple}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}).}$ Έστω $s : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$

απλή $\overset{\text{στον } L^p(\mathbb{R})}{\Longrightarrow}$ $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{C_i}$, όπου

τα $\lambda(C_i) < +\infty$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Αρκεί να προσεγγίσουμε κάθε χ_{C_i} χωριστά.

Άρα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) < +\infty$.

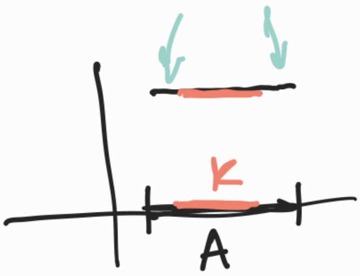
Έστω $\varepsilon > 0$. ΘΔΟ $\exists\ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ κλιμακωτή,

με $\|\ell - \chi_A\|_p < \varepsilon$.

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists$ K συμπαγές, U ανοιχτό :

$K \subseteq A \subseteq U$, και $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon^p$.

$$\Longrightarrow \lambda(A \setminus K) < \varepsilon^p \Longrightarrow \|\chi_A - \chi_K\|_p = \|\chi_{A\setminus K}\|_p$$



$\chi_A - \chi_K = \chi_{A \setminus K}$

$$= \left(\int_{A\setminus K} 1^p \, d\lambda \right)^{1/p} = \lambda(A\setminus K)^{1/p} < \varepsilon.$$

Άρα, αρκεί να προσεγγίσουμε τη χ_K από κάποια κλιμακωτή ℓ.

Το $U = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i)$, και $\underset{\text{συμπαγές}}{K} \subseteq U$

$$\Longrightarrow \exists\ N \in \mathbb{N} : \quad K \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i)}_{= \bigcup_{i=1}^{M} I_i} \subseteq U$$

$\bigcup_{i=1}^{M} I_i$, όπου τα I_i είναι <u>ξένα</u> διαστήματα $\subseteq \mathbb{R}$

(φραγμένα, όχι αναγκαστικά ανοιχτά).

Και: $\lambda(U\setminus K) < \varepsilon \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{M} I_i \setminus K\right) < \varepsilon^p$.

Αφού τα I_i είναι ξένα, $\chi_{\bigcup_{i=1}^{M} I_i} = \sum_{i=1}^{M} \chi_{I_i} =: \ell$,

$\ell \in Step(\mathbb{R})$.

Και: $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} I_i \Rightarrow \underbrace{\chi_{\bigcup_{i=1}^{M} I_i}}_{= \ell} - \chi_K =$

$$= \chi_{\left(\bigcup_{i=1}^{M} I_i \setminus K\right)} \Rightarrow$$

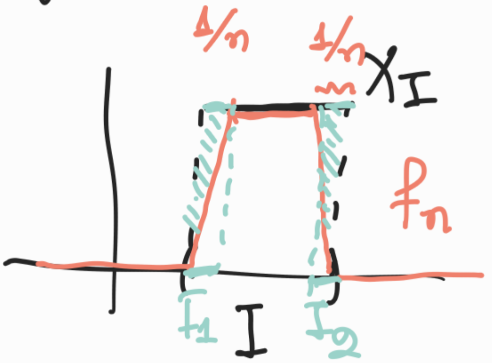
$$\Rightarrow \|\ell - \chi_K\|_p = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{M} I_i \setminus K\right)^{1/p} < (\varepsilon^p)^{1/p} < \varepsilon.$$

Άρα, $Step(\mathbb{R})$ πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leq p \neq +\infty)$.

Βήμα 3: Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

Αφού ο $Step(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ αρκεί ΝΔΟ: $\forall f \in Step(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in C_c(\mathbb{R}) : \|f - g\|_p < \varepsilon$.

Άρα, αρκεί να προσεγγίζεται κάθε χ_I, για κάθε I φραγμένο διάστημα.



Κάθε $f_n \in C_c(\mathbb{R})$,

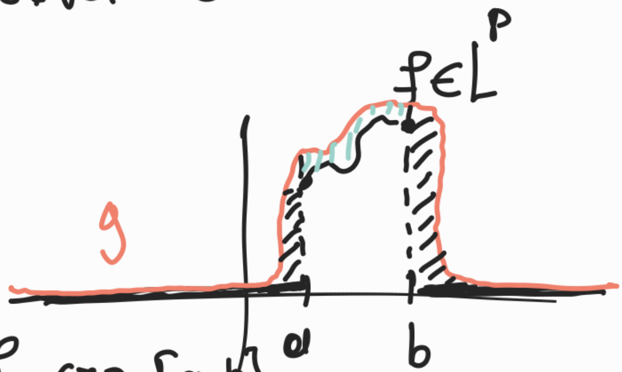
και $\|f_n - \chi_I\|_p =$

$$= \Big(\int_{I_1 \cup I_2} \underbrace{|f_n - \chi_I|}_{\leq 1}^p \, d\lambda \Big)^{1/p} \leq \lambda(I_1 \cup I_2)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

∎

→ <u>Πόρισμα</u>: Έστω $1 \leq p \neq +\infty$. Οι $C([a,b])$ και $Step([a,b])$ είναι πυκνοί στον $(L^p([a,b]), \|\cdot\|_p)$.



<u>Απόδ</u>: Έστω $f \in L^p([a,b])$.

Έστω $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, με $\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{στο } [a,b] \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Τότε $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists\, g \in C_c(\mathbb{R})$ και $\ell \in Step(\mathbb{R})$:

$$\|g - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon \quad , \quad \|\ell - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Άρα: $\| \underbrace{g_{|[a,b]}}_{\in C([a,b])} - f \|_{L^p([a,b])} = \Big(\int_{[a,b]} |g - f|^p \, d\lambda \Big)^{1/p}$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |g - \tilde{f}|^p \, d\lambda \Big)^{1/p} =$$

$$= \|g - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Παρόμοια για κλιμακωτή. ∎

⚠ (i) Οι $C_c(\mathbb{R})$, $Step(\mathbb{R})$ <u>δεν</u> είναι πυκνοί στον $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

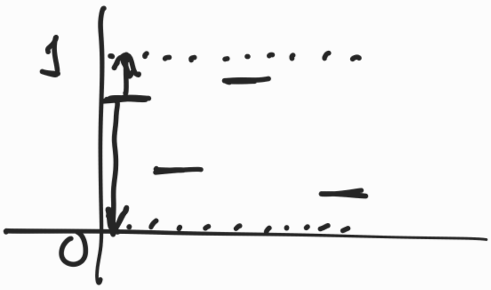
(ii) Οι $C([a,b])$, $Step([a,b])$ <u>δεν</u> είναι πυκνοί στον $(L^\infty([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

<u>Αποδ</u>: (i) Η $f = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, και:

$$\|f - g\|_\infty = 1, \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}) \cup Step(\mathbb{R}).$$

(ii) • Η $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$. Τότε, $\forall \ell \in Step(\mathbb{R})$,

$\|f - \ell\|_\infty \geq \frac{1}{2}$:



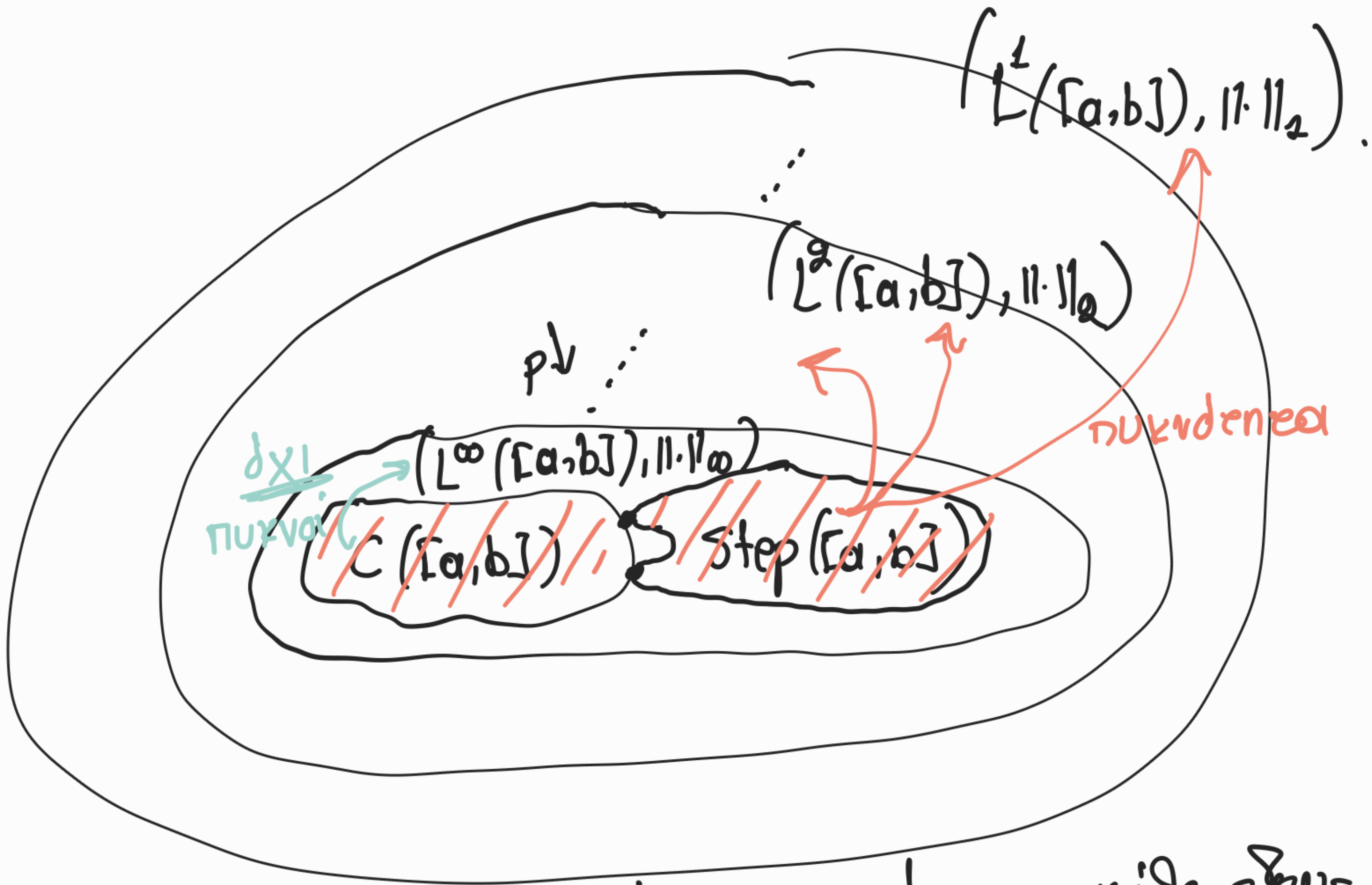
• Το $C([a,b])$ είναι κλειστό στο $(L^\infty([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ (καθώς ομοιόμορφο όριο συνεχών είναι συνεχής).

Δηλ., $\forall (f_n)_n$ ακολ. στο $(C([a,b])$ με $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ για κάποια $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, ανήκει <u>και</u> η f στον $C([a,b])$.

Άρα, πχ η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ <u>δεν</u> μπορεί να προσεγγιστεί από συνεχείς ως προς την $\|\cdot\|_\infty$.

∎

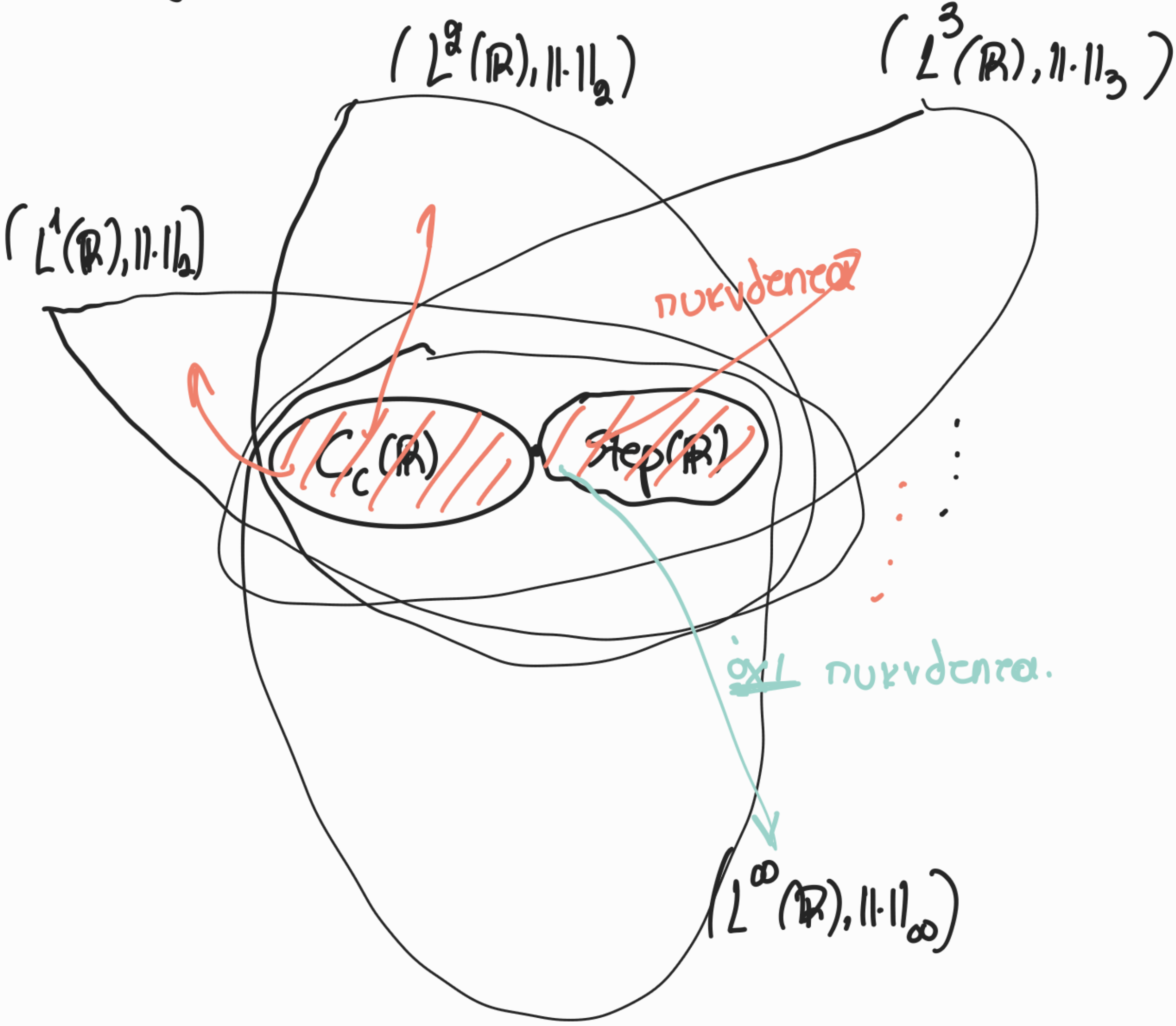
→ <u>Εικόνα για τους $L^p([a,b])$:</u>



Κάθε εσωτερικός χώρος είναι πυκνός σε κάθε εξωτερικό (με τη νόρμα του εξωτερικού).
(<u>εκτός</u> όταν ο εξωτερικός χώρος είναι ο $L^\infty([a,b])$).

Πχ.: Ο $L^2([a,b])$ είναι πυκνός στον $(L^1([a,b]), \|\cdot\|_1)$.

→ Εικόνα για τους $L^p(\mathbb{R})$:



$\forall \; 1 \leq p, q \lneq +\infty$, ο $L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ περιέχει τον $C_c(\mathbb{R})$, άρα είναι και αυτός πυκνός, και στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, και στον $(L^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$.

Επίσης, $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ πυκνό στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $\forall \; 1 \leq p \lneq +\infty$.

→ Ο $(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_2)$ είναι ξεχωριστός ανάμεσα σε όλους τους άλλους $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$, καθώς η $\|\cdot\|_p$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

→ Χώροι εσωτερικών γινομένων:

→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. Μια $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τα:

(α) $\langle x,x \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in X$, και $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(β) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$, $\forall x,y \in X$.

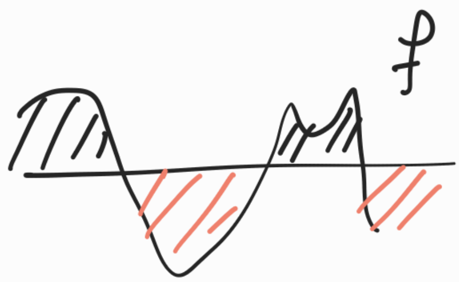
(γ) $\forall y \in X$, η συνάρτηση $x \longrightarrow \langle x,y \rangle$ είναι γραμμική.

→ Ορισμός: $\forall \; f,g \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$, ορίζουμε

$$\langle f,g \rangle := \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu$$

→ Πρόταση: Η $\langle \cdot , \cdot \rangle : \left(L^2(X,\mathcal{A},\mu)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο.

Απόδ: Η $f \cdot \bar{g}$ είναι μετρήσιμη (επειδή οι $f,\bar{g}$ είναι).



Άρα, το $\int f\cdot\bar{g}\,d\mu$ ορίζεται αν $\int \underbrace{|f\cdot\bar{g}|}_{\geq 0}\,d\mu < +\infty$.

Από Cauchy-Schwarz,

$$\int |f\cdot\bar{g}|\,d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < +\infty.$$

Και: (α) $\langle f,f\rangle = \int \underbrace{f\cdot\bar{f}}_{\overset{\|}{|f|^2}}\,d\mu \left(= \|f\|_2^2\right) \geq 0, \ \forall f \in L^2,$

και $\langle f,f\rangle = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_2 = 0$

$\Longleftrightarrow f = 0$ στον $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$

(δηλ. $f=0$ κ.σ. μ-σ.π.).

(β) $\langle f,g\rangle = \int f\cdot\bar{g}\,d\mu = \int \left(\overline{\bar{f}\cdot g}\right)d\mu$

$$= \overline{\int \bar{f}\cdot g\,d\mu} = \overline{\langle g,f\rangle}.$$

(γ) $\forall g \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$, $T_g : L^2(X,\mathcal{A},\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$T_g(f) := \langle f,g\rangle.$$

Η T_g είναι γραμμική:

$$T_g(f+h) = \langle f+h, g\rangle = \int (f+h)\cdot\bar{g}\,d\mu$$

$$= \int f\bar{g}\,d\mu + \int h\cdot\bar{g}\,d\mu$$

$$= T_g(f) + T_g(h).$$

$$T_g(\overset{\in\mathbb{C}}{\lambda} f) = \langle \lambda f, g\rangle = \int \lambda f\cdot\bar{g}\,d\mu = \lambda\langle f,g\rangle. \ \blacksquare$$

→ Ξέρουμε ότι, αν ο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε η

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

με $\quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in X,$

είναι νόρμα στον X.

(Λέγεται η νόρμα που επάγεται από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

→ Στην περίπτωση του $\left(L^2(X,\mathcal{A},\mu), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$,

$\forall\ f \in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$,

$$\sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int \underbrace{f\cdot\bar{f}}_{|f|^2}\, d\mu} = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2} = \|f\|_2 .$$

Δηλ., η $\|\cdot\|_2$ είναι ακριβώς η νόρμα που επάγεται από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

→ Ορισμός: Ένας $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται χώρος Hilbert αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

$\|\cdot\|$ ↳ η νόρμα που επάγεται από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Πχ: Ο $\left(L^2(X,\mathcal{A},\mu), \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|_2\right)$ είναι χώρος Hilbert.