

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{f}(k)| &= \left| \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \right| \\
 &\leq \int_0^1 \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i k x}|}_{=1} d\lambda(x) \\
 &= \|f\|_{L^1(\pi)} \leq \|f\|_\infty.
 \end{aligned}$$

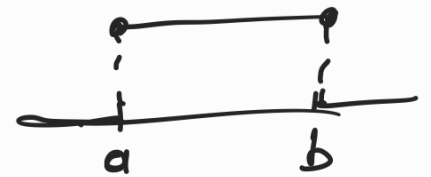
Άρα, η $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη, $\forall f \in L^1(\pi)$.

→ Λήμμα Riemann-Lebesgue: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\hat{f}(k) \rightarrow 0 \text{ καθώς } k \rightarrow \pm\infty.$$

Απόδειξη: Βήμα 1: Το δείχνουμε για $f = \chi_I$,
όπου I διάστημα $(\subseteq [0, 1))$.

Έστω I τέτοιο διάστημα, με άκρα $a < b$. χ_I



Τότε, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\hat{\chi}_I(k) = \int_0^1 \chi_I(x) \cdot e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \int_a^b e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \frac{1}{-2\pi i k} \cdot \int_a^b (e^{-2\pi i k x})' dx$$

$$= \frac{1}{-2\pi i k} \cdot (e^{-2\pi i k \cdot b} - e^{-2\pi i k \cdot a}),$$

$$\text{άρα } |\hat{\chi}_I(k)| = \frac{1}{2\pi k} \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i k b} - e^{-2\pi i k a}|}_{\leq |e^{-2\pi i k b}| + |e^{-2\pi i k a}|}$$

$$1 + 1 = 2$$

$$\leq \frac{1}{\pi k} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$$

Βήμα 2: Το δείχνουμε για κληρονομώτες.

Έστω $l \in \text{Step}(\pi) \Rightarrow l = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{I_i}$,

για $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{C}$, I_i διαστήματα $\subseteq [0, 1)$.

Άρα: $\hat{l}(k) = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\hat{\chi}_{I_i}(k)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$.

($\triangle$ $\begin{cases} \widehat{f+g}(k) = \widehat{f}(k) + \widehat{g}(k), \\ \widehat{\lambda f}(k) = \lambda \cdot \widehat{f}(k) \end{cases}$) $\downarrow_{k \rightarrow \pm\infty}$
0

Βήμα 3: Έστω $f \in L^1(\pi)$, $\varepsilon > 0$.

ΘΔΟ για μεγάλα $|k|$, $|\hat{f}(k)| < \varepsilon$.

$\exists l \in \text{Step}(\pi) : \|l - f\|_{L^1(\pi)} < \varepsilon/2$.

• Δείχνουμε $\hat{l}(k) \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$, άρα $\exists k_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall |k| \geq k_0$ έχουμε: $|\hat{l}(k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

• $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(k) - \hat{l}(k)| = \left| \int_0^1 (f(x) - l(x)) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \right|$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 |f(x) - l(x)| \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i k x}|}_{=1} d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 |f - l| d\lambda = \|f - l\|_{L^1(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Επομένως : $\forall k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq k_0$:

$$|\hat{f}(k)| \leq \underbrace{|\hat{f}(k) - \hat{l}(k)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\hat{l}(k)|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon.$$

⚠ Το ότι $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ καθώς $|k| \rightarrow \infty$ είναι καλή ένδειξη για το ότι κάποιες

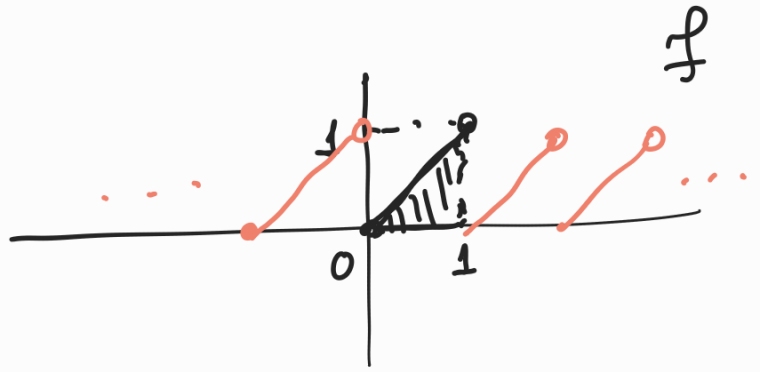
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ μπορεί να συζητήσουν

$$\begin{aligned}
\left(|S_{N+1}(f; x) - S_N(f; x)| = \left| \hat{f}(N+1) e^{2\pi i (N+1)x} + \right. \right. \\
\left. \left. + \hat{f}(-(N+1)) e^{-2\pi i (N+1)x} \right| \right. \\
\left. \leq |\hat{f}(N+1)| + |\hat{f}(-(N+1))| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \right).
\end{aligned}$$

Δεν είναι βέβαια αρκετό.

→ Παράδειγμα: Έστω f 1-περιοδική, με

$$f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1).$$



Βρείτε τη σειρά Fourier της f .

Λύση:

$$\begin{aligned} \bullet \hat{f}(0) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \left(\text{ή: } \hat{f}(0) = \int_0^1 f(x) dx \right. \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left. \right). \end{aligned}$$

$$\bullet \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \int_0^1 x \boxed{e^{-2\pi i k x}} dx$$

$$\parallel$$

$$\frac{(e^{-2\pi i k x})'}{-2\pi i k}$$

$$= \frac{1}{-2\pi i k} \int_0^1 x \cdot (e^{-2\pi i k x})' dx$$

$$= \frac{1}{-2\pi i k} \left[x e^{-2\pi i k x} \right]_0^1 - \frac{1}{-2\pi i k} \int_0^1 \underbrace{(x)'}_1 e^{-2\pi i k x} dx$$

$$\left(\int_0^1 e^{-2\pi i k x} dx = 0 \right. \\ \left. \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right).$$

$$= \frac{-1}{2\pi i k} \cdot \underbrace{e^{-2\pi i k}}_{\substack{=1 \\ (k \in \mathbb{Z})}} = \frac{i}{2\pi k}.$$

Άρα, η σειρά Fourier της f στο x είναι:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{i}{2\pi k} \cdot e^{2\pi i k x}.$$

⚠ Στο παράδειγμα αυτό, $\hat{f}(k) = \frac{i}{2\pi k} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$

Επίσης: όταν δείχνει ότι $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}$,

θα προκύψει αμέσως από το παράδειγμα ότι

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} :$$

Για $f(x) = x$ στο $[0, 1)$,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

" $\|f\|_{L^2(\pi)}^2$

$$\text{και} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left|\frac{i}{2\pi k}\right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{4\pi^2 k^2}$$

$$= \frac{1}{4} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}.$$

$$\text{Άρα, το δε} \quad \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$$

συνοψίζουμε δε:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 2\pi^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 2\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

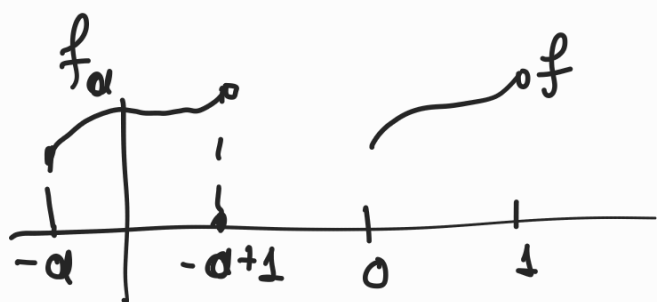
→ Ιδιότητες των συντελεστών Fourier

(I)

→ Πρόταση: (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

την $f_\alpha \in L^1(\mathbb{T})$ με: $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_\alpha(x) = f(x + \alpha), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Τότε, $\hat{f}_\alpha(k) = e^{2\pi i k \cdot \alpha} \hat{f}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε τη $g_n \in L^1(\mathbb{T})$

με: $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$g_n(x) = e^{2\pi i n x} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Τότε, $\hat{g}_n(k) = \hat{f}(k - n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

⚠ ο $\wedge$ δίνει μεταφορές σε "εξροφές",
και αντίεξροφα.

Απόδ: (α) $\hat{f}_\alpha(k) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} f(x + \alpha) dx$

$$= \int_a^{a+1} \underbrace{e^{2\pi i k a}}_{e^{2\pi i k y}} e^{-2\pi i k y} f(y) d\lambda(y)$$

$$= e^{2\pi i k a} \cdot \underbrace{\int_a^{a+1} f(y) \cdot e^{-2\pi i k y} d\lambda(y)}_{\hat{f}(k)}$$

(αφού το $[a, a+1]$ έχει μήκος 1).

$$(b) \quad \hat{g}_n(k) = \int_0^1 \underbrace{g_n(x)}_{e^{2\pi i n x} f(x)} \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)$$

$$= \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i (k-n)x} dx = \hat{f}(k-n).$$

■

Ⓐ → Πρόταση: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}.$$

Απόδ.: $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(\underline{-k}) = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i \underline{(-k)} \cdot x} d\lambda(x)$

$$= \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{\overline{f(x)}} \cdot \overline{(e^{2\pi i(-k) \cdot x})} d\lambda(x)$$

$$= \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) = \boxed{\int_0^1 \overline{f(x)} \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)}$$

$$= \widehat{\overline{f}}(k)$$

$\widehat{\overline{f}}(k)$

→ Πόρισμα: Αν μια $f \in L^1(\mathbb{T})$ παίρνει μόνο
πραγματικές τιμές, τότε: $\forall k \in \mathbb{Z}$,
 οι (μγαδικοί) αριθμοί $\widehat{f}(k)$ και $\widehat{f}(-k)$
 είναι συζυγείς.

Απόδ.: $\widehat{f}(-k) = \overline{\widehat{\overline{f}}(k)} \stackrel{\overline{\overline{f}} = f}{=} \overline{\widehat{\overline{f}}(k)}$

→ Άσκηση: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, με
 $\widehat{f}(-1) = -1$, $\widehat{f}(0) = 2$, $\widehat{f}(1) = 3$.

Είναι δυνατόν η f να είναι πραγματική συνάρτηση;

Λύση: Όχι, αφού οι $\hat{f}^{-1}(-1)$, $\hat{f}^3(1)$ δεν είναι συζυγείς ($\overline{(-1)} = -1 \neq 3$).

III

Πρόταση:

(α) Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\hat{f}'(k) = (2\pi i k) \cdot \hat{f}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, $\exists$ σταθερά $C = C(f) \geq 0$, ώστε

$$|\hat{f}'(k)| \leq \frac{C}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

(β) Επαγωγικά: έστω $f \in C^n(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\hat{f}^{(n)}(k) = (2\pi i k)^n \cdot \hat{f}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, $\exists$ σταθερά $C = C(f, n) \geq 0$, ώστε:

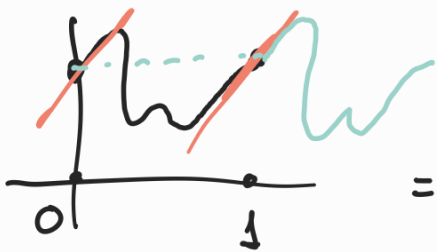
$$|\hat{f}^{(n)}(k)| \leq \frac{C}{|k|^n}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

And $\hat{f}'(k) = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2\pi i k x} dx$

$$= \left[\cancel{f(x) e^{-2\pi i k x}} \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot (e^{-2\pi i k x})' dx$$

$$\underbrace{f(1)}_{f(0)} \underbrace{e^{-2\pi i k}}_1 - \underbrace{f(0)}_{f(0)} \underbrace{e^{-2\pi i k \cdot 0}}_1$$

$$= - \int_0^1 f(x) \cdot (-2\pi i k) \cdot e^{-2\pi i k x} dx$$



$$= 2\pi i k \cdot \underbrace{\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} dx}_{\hat{f}(k)}$$

Apakah, $\hat{f}'(k) = (2\pi i k) \hat{f}(k)$

$$\xrightarrow{k \neq 0} \hat{f}(k) = \frac{\hat{f}'(k)}{2\pi i k}$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(k)| = \frac{|\hat{f}'(k)|}{2\pi \cdot |k|} \leq \dots \leq \frac{C}{|k|}$$

$$\forall k \neq 0, \quad |\hat{f}'(k)| = \left| \int_0^1 f'(x) \cdot e^{-2\pi i k x} dx \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f'(x)| \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i k x}|}_{=1} dx$$

$$= \int_0^1 |f'(x)| dx = C \in \underline{\mathbb{R}},$$

επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$

$\Rightarrow$ η $f'|_{[0,1]}$ είναι φραγμένη: $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{|f'(x)|}_{\leq M} dx \leq \int_0^1 M dx = M (< +\infty).$$

(b) Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$:

$$\widehat{(f'')}(\kappa) \stackrel{=}{=} \widehat{\left(\underbrace{(f')}_{=: g} \right)' }(\kappa)$$

$$= (2\pi i \kappa) \cdot \widehat{g}(\kappa) = (2\pi i \kappa) \cdot \widehat{(f')}(\kappa)$$

$$= (2\pi i \kappa)^2 \widehat{f}(\kappa)$$

$\vdots$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \widehat{f^{(n)}}(k) &= (2\pi i k) \cdot \widehat{f^{(n-1)}}(k) \\
&= (2\pi i k)^2 \cdot \widehat{f^{(n-2)}}(k) \\
&\vdots \\
&= (2\pi i k)^n \widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

εξαρτάται
από f , n , αλλά
όχι k .

$$\text{Άρα, } \forall k \neq 0, \quad \left| \widehat{f}(k) \right| = \frac{\left| \widehat{f^{(n)}}(k) \right|}{(2\pi)^n \cdot |k|^n} \leq \frac{C}{|k|^n},$$

καθώς $\forall k \neq 0$:

$$\left| \widehat{f^{(n)}}(k) \right| \leq \int_0^1 \underbrace{\left| f^{(n)}(x) \right|}_{\text{συνεχής}} dx \leq M.$$

συνεχής

σε $[0,1]$,

άρα $\exists M \in \mathbb{R}$

ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$

⚠ Άρα, όσο πιο "λεία" είναι για f ,

τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι $\widehat{f}(k)$

καθώς $|k| \rightarrow +\infty$.

→ Τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

→ Ορισμός: Ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο (βαθμους N)

eineinde gürapensen $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

μE $p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \cdot e^{2\pi i k x}$,

δπου $c_k \in \mathbb{C} \quad \forall k$ και $N \in \mathbb{N}$.

(δηλ., p = πεπερασμένος χρ. συνδυασμός καινοίων ϕ_k)

($\psi \in$ κανονικό ατόμιο c_N, c_{-N} να είναι $\neq 0$).

Συμφωνούμε πως ο βαθμός του επιχλωμετρικού πόλυ-
νύμου Ο δεν ορίζεται.

$\rightarrow \underline{\Pi_X}$ το e^{-2nix} είναι επιφ. πολλαπλασιασμο βαθμια 1

$$e^{2ni \cdot (-1) \times}$$

$w e^{2nix} + e^{100nix} \text{ ————— } // \text{ ————— } 50 .)$

⚠ Κάθε τριγωνικό πολλαώνυμο p είναι 1 - περιθιακό:

$$p(x+1) = p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

→ Άσκηση: Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι τριγ. πολυώνυμα;

✓ 1 , ✓ e^{4nix} , $\phi_0^n = e^{2ni \cdot 0 \cdot x}$

e^{nix} ✗

e^x , ✗ x
 ✗ Δεν είναι περιοδικές,
 άρα όχι

✓ $\cos(2nx)$

✓ $\sin(2nx)$

✗ $\cos x$

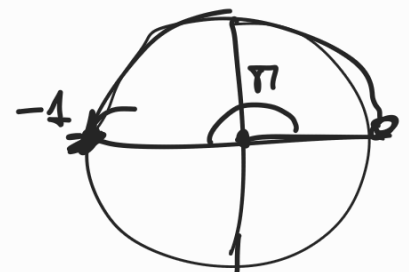
✓ $(\cos(2nx) + 2)^{10}$

✓ $0 = \underbrace{0}_{\text{✓}} \cdot \underbrace{e^{2ni \cdot 0 \cdot x}}_{\text{✓}}$

✓ $\cos(2nx) + 2$
 ✓ $(\cos(2nx) + 2)^2$

• $e^{4nix} = e^{2ni \cdot 2 \cdot x}$, βαθμός 2.

• $e^{nix} = e^{2ni \cdot k \cdot x} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.



Το $p(x) = e^{nix}$ Δεν είναι 1-περιοδικό:

$p(0) = e^0 = 1$, $p(1) = e^{ni} = -1 \neq p(0)$.

• $\cos(2nx) = \frac{e^{2nix} + e^{-2nix}}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{2ni \cdot 1 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot e^{2ni(-1)x}$,

τριγ. πολυ. βαθμού 1.

$$\bullet \sin(2nx) = \frac{e^{2nix} - e^{-2nix}}{2i} = \frac{1}{2i} \cdot e^{2ni \cdot 1 \cdot x} - \frac{1}{2i} e^{2ni(-1)x}.$$

τριχ. πολυσ. βαθμολ 1.

• $\cos x$ είναι 2π -περιοδικό και όχι 1 -περιοδικό, άρα δεν είναι τριχ. πολυσ.

$$\bullet (\cos(2nx) + 2)^2 = [\cos(2nx)]^2 + \underline{4 \cos(2nx)} + \underline{4}$$

⚠ Αν p, q τριχ. πολυσ. $\implies p \cdot q$ είναι επίσης:

Ο λόγος είναι ότι $\forall k, n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\phi_k \cdot \phi_n = \phi_{k+n}} \quad (e^{2nikx} \cdot e^{2ninx} = e^{2ni(k+n)x}).$$

$$p = \sum_i c_i \phi_i, \quad q = \sum_j d_j \cdot \phi_j$$

$$\implies p \cdot q = \sum_{i,j} (c_i d_j) \cdot \underbrace{(\phi_i \phi_j)}_{\phi_{i+j}}.$$

→ Πρόταση: Έστω $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ περιγ. πολυώνυμο,
 $\forall \epsilon$
$$p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \cdot e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(για κάποιο $N \in \mathbb{N}$, και $c_k \in \mathbb{C}$).

Τότε:

$$\textcircled{1} \quad \hat{p}(k) = \begin{cases} c_k, & \forall k \in \{-N, \dots, N\} \\ 0, & \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-N, \dots, N\}. \end{cases}$$

$$\text{Άρα,} \quad p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{p}(k) e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} \quad \|p\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left\| (\hat{p}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2},$$

$$\begin{aligned} \text{δηλ.:} \quad \left(\int_{[0,1]} |p|^2 d\lambda \right)^{1/2} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{p}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Απόδ.:

$$\textcircled{1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{p}(k) = \int_0^1 p(x) \cdot e^{-2\pi i k x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{m=-N}^N c_m \cdot e^{2\pi i m x} \right) e^{-2\pi i k x} dx$$

$$= \sum_{m=-N}^N c_m \cdot \int_0^1 e^{2\pi i (m-k)x} dx$$

• $\forall k \in \{-N, \dots, N\}$, তবে:

$$\int_0^1 e^{2\pi i (m-k)x} dx = \begin{cases} 1, & m=k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{p}(k) = c_k \cdot 1 = c_k.$$

• $\forall k \notin \{-N, \dots, N\}$, তবে $k \neq m \quad \forall m \in \{-N, \dots, N\}$

এবং $\int_0^1 e^{\underbrace{2\pi i (m-k)x}_{\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}} dx = 0 \Rightarrow \hat{p}(k) = 0.$

$$(2) \quad \|p\|_{L^2(\pi)}^2 = \int_0^1 |p(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^1 p(x) \cdot \overline{p(x)} dx \quad (= \langle p, p \rangle)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x} \right) \cdot \left(\sum_{m=-N}^N \bar{c}_m e^{-2\pi i m x} \right) dx$$

$$\left(= \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k \phi_k, \sum_{m=-N}^N \bar{c}_m \phi_m \right\rangle \right)$$

$$= \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k \bar{c}_m \left| \int_0^1 e^{2\pi i (k-m)x} dx \right| = 0, \text{ expts } k \neq m$$

$$\left(= \sum_{k=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_k \bar{c}_m \cdot \langle \phi_k, \phi_m \rangle \right)$$

$$= \sum_{k=-N}^N c_k \cdot \bar{c}_k \cdot \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i (k-k)x} dx}_{=1}$$

$$= \sum_{k=-N}^N c_k \bar{c}_k \cdot \underbrace{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}_{=1}$$

$$= \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Λείγουμε ότι: $\forall$ επιγ. πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\textcircled{1} \quad p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{p}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\hat{p}(k) = \begin{cases} c_k, & k = -N, \dots, N \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases})$$

$$\textcircled{2} \quad \|p\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{p}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|(\hat{p}(k))\|_{\ell^2} \\ (= \left(\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \right)^{1/2}).$$

→ Άσκηση: Βρείτε τη σειρά Fourier του $\cos(2\pi x)$.
Ισχύει με $\cos(2\pi x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

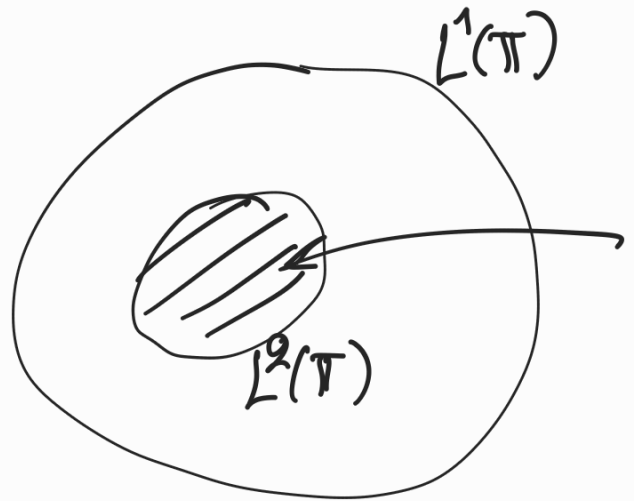
Λύση: $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2} e^{2\pi i x} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Άρα, το $\cos(2\pi x)$ είναι επιγ. πολυώνυμο,
άρα ισχύει με τη σειρά Fourier του $\forall x \in \mathbb{R}$,
και έτσι η σειρά Fourier του $\cos(2\pi x)$
είναι η

$$\frac{1}{2} e^{2\pi i x} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i x}$$

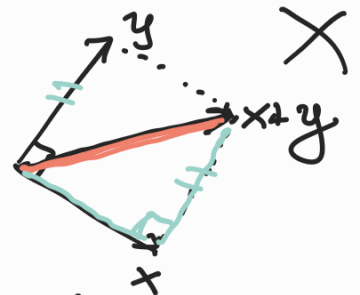
$$(f(x) := \cos(2\pi x) \Rightarrow \hat{f}(1) = \frac{1}{2}, \hat{f}(-1) = \frac{1}{2}, \\ \hat{f}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\})$$

→ Η κατασκευή στον $L^2(\mathbb{T})$:



→ Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος εσωτ. γινομένου, με
επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$.

Συμβαίνει: $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$.



→ Πυθαγόρειο Θεώρημα: $\forall x \perp y$ στον X ,
 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Γενικότερα: αν $x_1, \dots, x_n \in X$ και είναι κάθετα
αυτή δίο, τότε: $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.

$$\begin{aligned}
 (\text{Ans: } \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
 &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} + \cancel{\langle x, y \rangle} + \cancel{\langle y, x \rangle} + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|^2})
 \end{aligned}$$