

→ Λήμμα: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x) \sin((2N+1)\pi x) dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Απόδ.: Είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος Riemann - Lebesgue:

$$\sin((2N+1)\pi x) = \frac{e^{(2N+1)\pi i x} - e^{-(2N+1)\pi i x}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{\pi i x}}{2i} \cdot \left(e^{2\pi i N x} - e^{-2\pi i (N+1)x} \right). \quad \text{Αρα:}$$

$$\int_0^1 f(x) \sin((2N+1)\pi x) d\lambda(x) = \frac{1}{2i} \cdot \int_0^1 \underbrace{[f(x) e^{nix}]_{n=2N+1}}_{=:g(x)} \cdot (e^{2niNx} - e^{-2ni(N+1)x}) d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{2i} (\hat{g}(-N) - \hat{g}(N+1)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad \text{καθώς η } 1\text{-περιοδική}$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, με $g(x) = e^{nix} f(x) \quad \forall x \in [0, 1)$, ανήκει στον $L^1(\mathbb{T})$

(είναι μετρήσιμη, και $\int_0^1 \underbrace{|g(x)|}_{=: |f(x)|} d\lambda(x) = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty$).

■

Το Θεώρημα του Dini θα μας δώσει συνθήκες που εγγυώνται ότι

$$f(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}$$

για κακάληκτες f και x_0 . Θα είναι αναγκαία και ποια
αρκούν της f γύρω από το x_0 (συνέχεια στο x_0 δεν
αρκεί).

→ Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λέμε ότι η f είναι Lipschitz συνεχής στο x_0 αν $\exists \delta = \delta(f, x_0) > 0$

και $M = M(f, x_0) \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

→ Παρατηρήσεις:

① Αν η f είναι Lipschitz συνεχής

(δηλ., αν $\exists M > 0: |f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$),

τότε η f είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

② Αν η f είναι Lipschitz συνεχής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε

είναι συνεχής στο x_0 (και $|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$).

($\Rightarrow$ η Lipschitz συνέχεια στο x_0 είναι ισχυρότερη από τη συνέχεια στο x_0).

③ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε είναι και Lipschitz συνεχής στο x_0 .

($\Rightarrow$ η παραγωγισιμότητα στο x_0 είναι ισχυρότερη από τη Lipschitz συνέχεια στο x_0).

Απόδ.: f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow$ υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, και ισούται με κάποιο μιαδικό αριθμό $f'(x_0)$.

Άρα, από τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = 1$:

$\exists \delta > 0$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, ισχύει ότι $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \overbrace{|f'(x_0)| + 1}^{M},$

άρα $|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0| \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$ ■

! → Θεώρημα Dini (αληθή μορφή 1, Lipschitz συνέχεια στο x_0):

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

Τότε,

$$f(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ όπου η f είναι Lipschitz συνεχής.

! Πόρισμα :

① Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ Lipschitz συνεχής. Τότε,

$$f(x) = \sum \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

② Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)} |f| d\eta < +\infty$. Τότε:

(a) $f(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη.

(b) Αν η f είναι παραγωγίσιμη (nowhere), τότε

$$f(x) = \sum \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

→ Ανδείξη Θεωρήματος: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Έχουμε:

$$S_N(f; x_0) - f(x_0) = f * D_N(x_0) - f(x_0)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N d\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) - \underbrace{f(x_0)}_{\text{circled}} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} D_N(y) d\lambda(y)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} [f(x_0 - y) - f(x_0)] \cdot D_N(y) d\lambda(y)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \boxed{\frac{f(x_0 - y) - f(x_0)}{\sin(\pi y)}} \cdot \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y),$$

$\stackrel{\text{purple}}{=} g_{x_0}(y)$

το οποίο $\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ αν η $g_{x_0} \in L^1(\mathbb{T})$.

Υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι Lipschitz συνεχής στο x_0 , έχουμε πράγματι ότι η $g_{x_0} \in L^1(\mathbb{T})$:

- Η g_{x_0} είναι μετρήσιμη, ως ημίικο μετρησίμων.

- $\int_{[-1/2, 1/2]} |g_{x_0}| d\lambda < \infty$: • Αφού $\frac{\sin(ny)}{ny} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$, $\exists \delta_1 > 0$:

$\forall |y| < \delta_1$, έχουμε: $\left| \frac{\sin(ny)}{ny} \right| \geq \frac{1}{2}$, και άρα $|\sin(ny)| \geq |y|$.

Ενίενς, η f είναι Lipschitz συνεχής στο x_0 , άρα $\exists \delta_2 > 0$:

$$\forall |y| < \delta_2, \quad |f(x_0 - y) - f(x_0)| \leq M \cdot |y| \quad (\text{για κάποιο } M \in \mathbb{R}).$$

Άρα, $\forall |y| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ισχύουν συγχρόνως τα:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sin(ny)| \geq |y| \\ |f(x_0 - y) - f(x_0)| \leq M \cdot |y| \end{array} \right\}.$$

$$\text{Άρα, } \int_{|y| < \delta} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) \leq \int_{|y| < \delta} \frac{|f(x_0 - y) - f(x_0)|}{|\sin(ny)|} d\lambda(y) \leq M \cdot |y| \geq |y|$$

$$\leq \int_{|y| < \delta} \frac{M \cdot |y|}{|y|} d\lambda(y) = M \cdot 2\delta < +\infty.$$

- Η g_{x_0} είναι τετριμμένα ορισμένη μακριά από το 0:

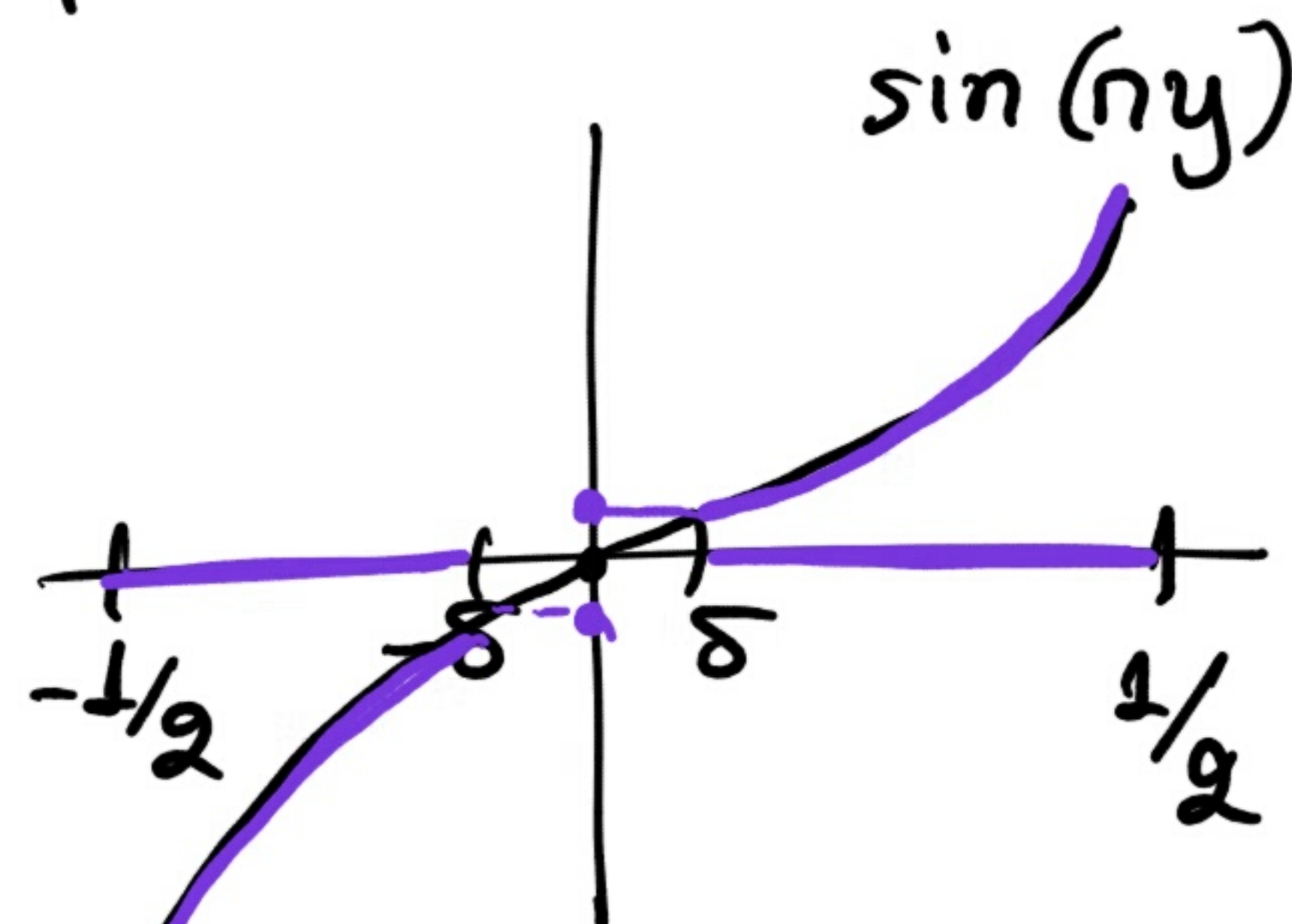
$$|\sin(ny)| \geq \sin(n\delta) \quad \forall \delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) \leq \int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} \frac{|f(x_0 - y) - f(x_0)|}{\sin(n\delta)} d\lambda(y)$$

$\leq \|f\|_{L^1(\pi)} \leq |f(x_0)|$

$$\leq \frac{1}{\sin(n\delta)} \cdot \left(\underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} |f(x_0 - y)| d\lambda(y)}_{\leq \|f\|_{L^1(\pi)}} + \underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} |f(x_0)| d\lambda(y)}_{\leq |f(x_0)|} \right) < +\infty.$$



$$\text{Άρα, } \int_{-1/2}^{1/2} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) = \int_{|y| < \delta} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) + \int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) < +\infty.$$

$$\text{Ανταδρά, } g_{x_0} \in L^1(\mathbb{T}). \quad \text{Άρα, } s_N(f; x_0) - f(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{δηλ. : } f(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}.$$

→ Άσκηση: Έστω $\alpha > 0$. Πέμε ότι μία $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι α -Hölder - συνεχής στο x_0 αν :

$$\exists \delta > 0 \text{ και } M > 0 \text{ ώστε } |f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|^\alpha.$$

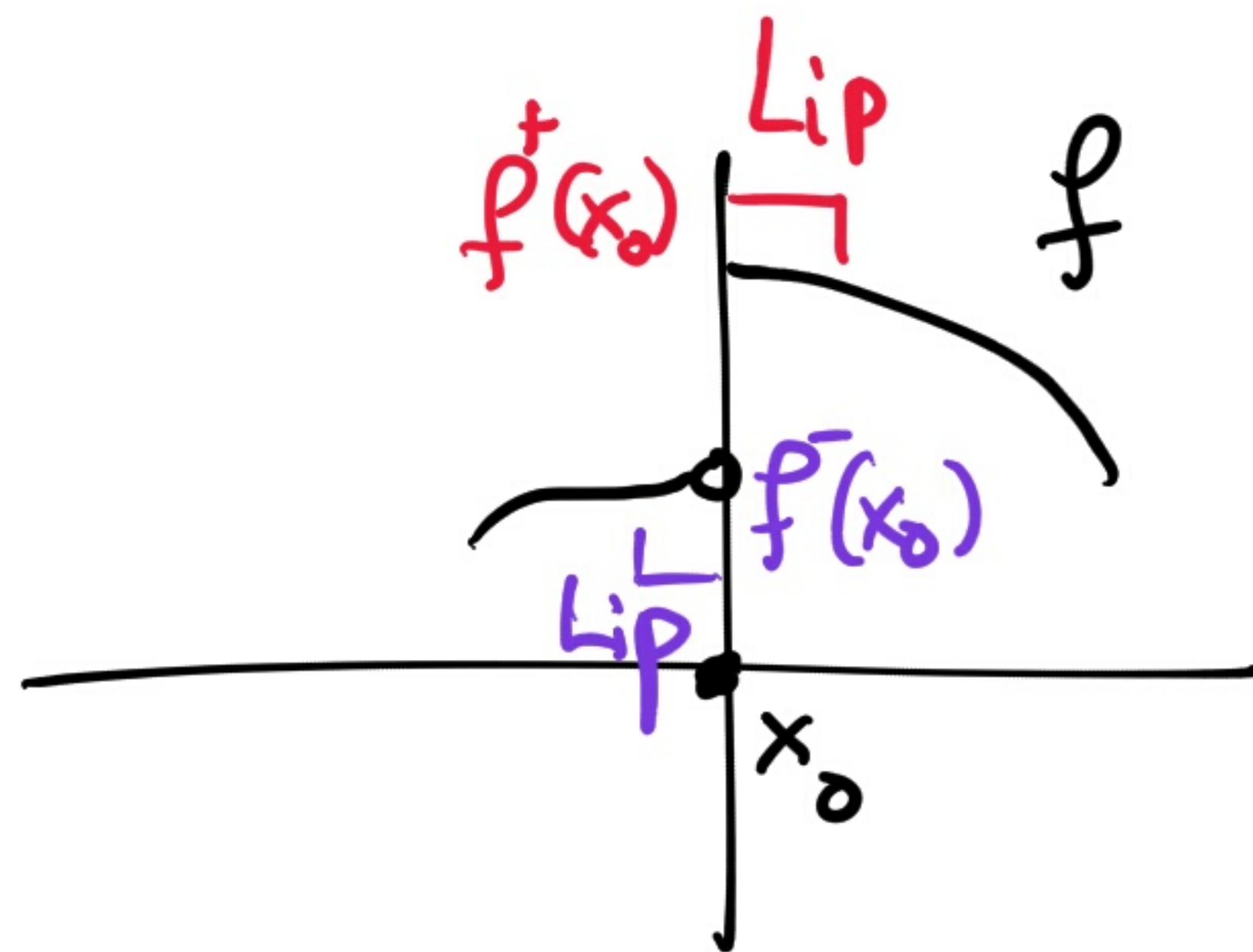
Δείξε ότι, αν η f είναι α -Hölder - συνεχής στο x_0 , τότε

$$f(x_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}.$$

($\triangle$ Ενδιαφέρον: $0 < \alpha < 1$.
Για $\alpha \geq 1$: f Lipschitz συν.
στο x_0 .)

Τώρα, θα χαλαρώσουμε τη συνθήκη ομαλότητας (Lipschitz
 συνέχεια στο x_0), ώστε να έχουμε Lipschitz συνέχεια πλευρικά
 στο x_0 , αλλά πιθανόν ούτε και συνέχεια στο x_0 .

Τότε, η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{2\pi i k x_0}$ θα συγκλίνει στο $\frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}$.



→ Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε:

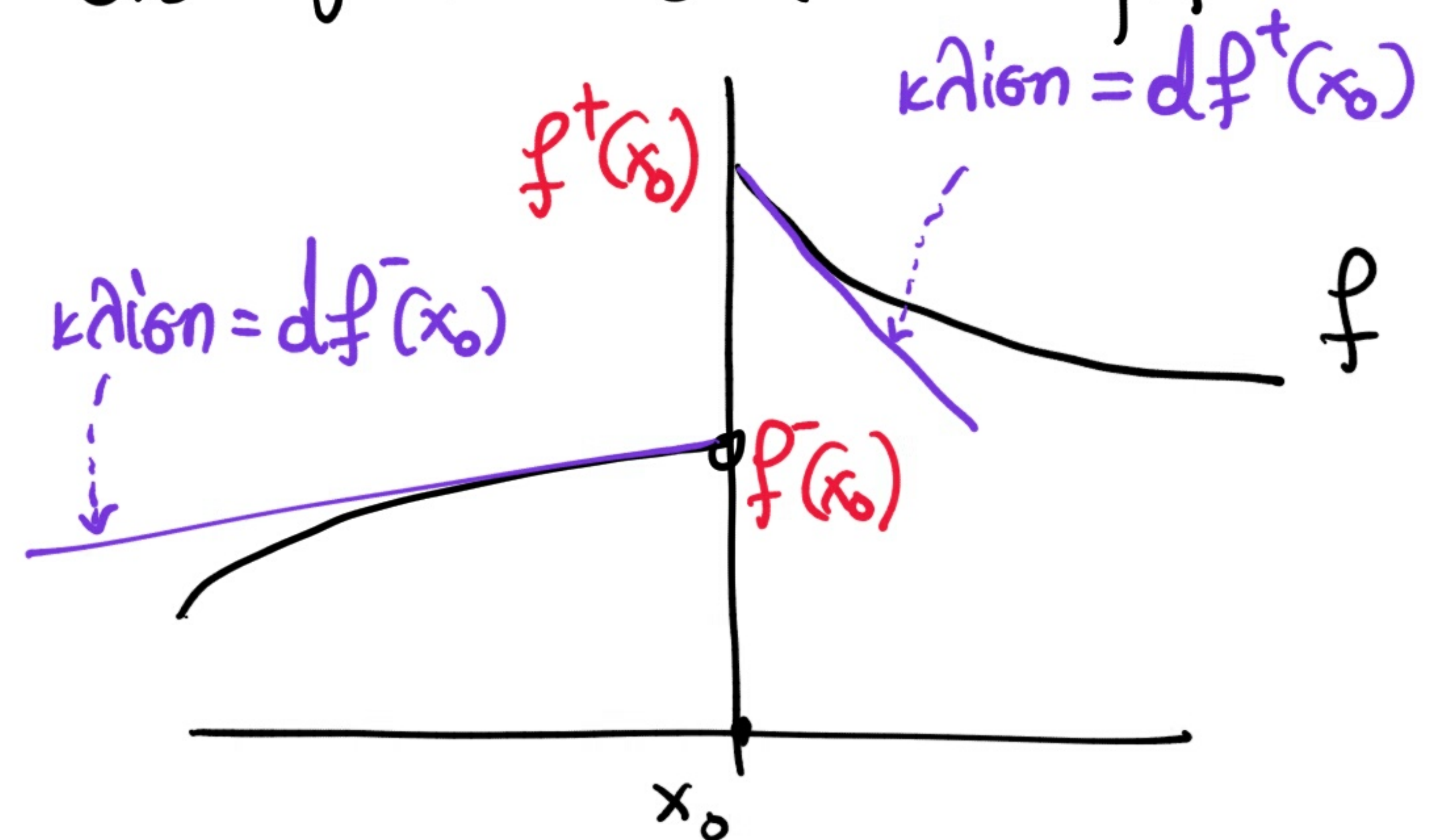
$$f^+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f^-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

τα ηγευρικά όρια της f στο x_0 .

Αν τα $f^+(x_0)$, $f^-(x_0)$ υπάρχουν και ανήκουν στο $\mathbb{C}$,
ορίζουμε ως ηγευρικές παραγώγους της f στο x_0 (αν υπάρχουν):

$$df^+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f^+(x_0)}{x - x_0},$$

$$df^-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f^-(x_0)}{x - x_0}.$$



→ Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Έστω ότι $f^+(x_0) \in \mathbb{C}$.

Λέμε ότι η f είναι **δεξιά Lipschitz συνεχής** στο x_0 αν:

∃ $\delta > 0$ και $M \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$|f(x) - f^+(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

- Έστω ότι $f^-(x_0) \in \mathbb{C}$.

Λέμε ότι η f είναι **αριστερά Lipschitz συνεχής** στο x_0 αν:

∃ $\delta > 0$ και $M \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$|f(x) - f^-(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

→ Παρατήρηση: Έστω τα $f^+(x_0), f^-(x_0), df^+(x_0), df^-(x_0)$ υπάρχουν στο $\mathbb{C}$.

Τότε, η f είναι δεξιά και αριστερά Lipschitz συνεχής στο x_0 .

Απόδειξη: • Δεξιά: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f^+(x_0)}{x - x_0} = df^+(x_0) \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ ώστε: } \left| \frac{f(x) - f^+(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \underbrace{|df^+(x_0)| + 1}_{N \in \mathbb{R}}, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

$$\text{Άρα, } |f(x) - f^+(x_0)| \leq N \cdot |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Άρα, η f είναι δεξιά Lipschitz συνεχής στο x_0 . • Αριστερά: Παρόμοια. ■

! → Θεώρημα Dini (αληθή μορφή 2: ηθευρική Lipschitz συνέχεια στο x_0):

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

Έστω ότι η f είναι δεξιά και αριστερά Lipschitz συνεχής σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}.$$

Απόδ.: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$S_N(f; x_0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y)$$

$\curvearrowright$
Εκμετάλλευση της
αλλαγής συμπεριφοράς
 για $x_0 - y < x_0$ ($y > 0$),
 $x_0 - y > x_0$ ($y < 0$)

$$\int_0^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) + \underbrace{\int_{-1/2}^0 f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y)}$$

$$\begin{aligned}
 u &:= -y \\
 d\lambda(y) &= -d\lambda(u) \\
 D_N(u) &= D_N(-u)
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) + \underbrace{\int_0^{1/2} f(x_0 + u) D_N(u) d\lambda(u)}_{u := y} =$$

$$= \int_0^{1/2} [f(x_0 - y) + f(x_0 + y)] D_N(y) d\lambda(y).$$

$$\text{Αρα, } S_N(f; x_0) - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} =$$

$$= \int_0^{1/2} [f(x_0 - y) + f(x_0 + y)] D_N(y) d\lambda(y) - (f^+(x_0) + f^-(x_0)) \cdot \underbrace{\int_0^{1/2} D_N(y) d\lambda(y)}_{\text{"1/2"}}$$

$$= \int_0^{1/2} \left([f(x_0 - y) - f^-(x_0)] + [f(x_0 + y) - f^+(x_0)] \right) \cdot \frac{\sin((2N+1)\pi y)}{\sin(\pi y)} d\lambda(y) \quad (D_N \text{ άρτια})$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} g_{x_0}(y) \cdot \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y), \text{ όπου}$$

$$g_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g_{x_0}(y) := \begin{cases} \frac{[f(x_0 - y) - f^-(x_0)] + [f(x_0 + y) - f^+(x_0)]}{\sin(\pi y)} & , 0 < y < 1/2 \\ 0 & , -1/2 \leq y < 0. \end{cases}$$

Έστω ότι η f είναι δεξιά και αριστερά Lipschitz συνεχής στο x_0 .

Θα δείξω ότι $g_{x_0} \in L^1(\mathbb{T})$, και άρα θα έχουμε

$$S_N(f; x_0) - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} = \int_{-1/2}^{1/2} g_{x_0}(y) \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Η g_{x_0} είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, $\int_{[-1/2, 1/2]} |g_{x_0}| d\lambda < +\infty$:

Αρκεί να δούμε $\int_0^{1/2} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) < +\infty$.

• Κοντά στο 0 :

$$\frac{\sin(ny)}{ny} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \implies \exists \delta_1 > 0 : \forall y \in (0, \delta_1), |\sin(ny)| \geq |y|.$$

f ηλεσρικά
Lipschitz συνεχής $\implies \exists \delta_2 > 0 : \forall y \in (0, \delta_2), \left| f(\overset{<0}{x_0 - y}) - f^-(x_0) \right| \leq M \cdot |y|,$
στο x_0 $\left| f(\overset{>0}{x_0 + y}) - f^+(x_0) \right| \leq M \cdot |y|.$

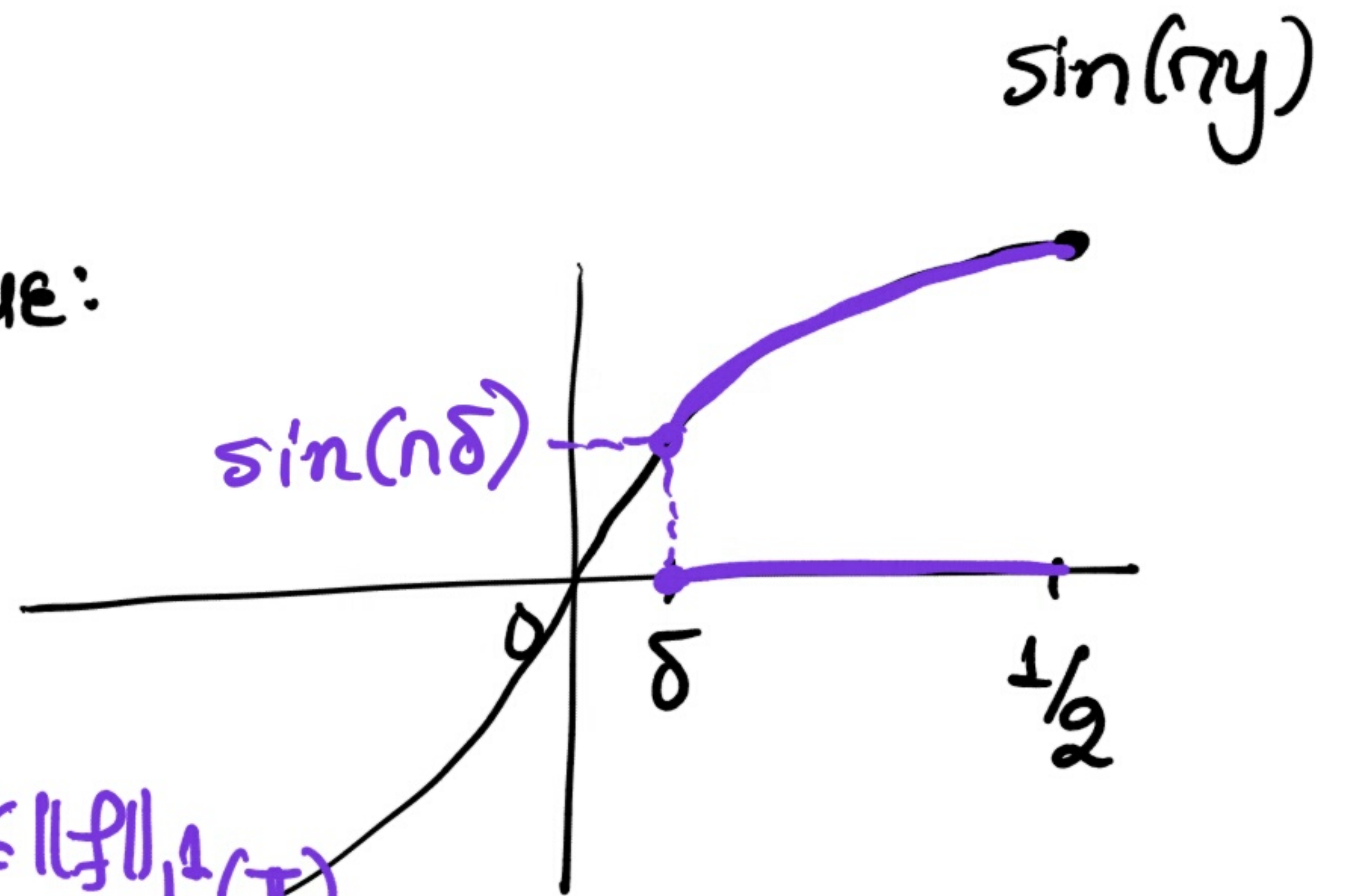
Αρα, για $y \in (0, \delta)$ όπου $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, έχουμε:

$$|g_{x_0}(y)| \leq \frac{2M|y|}{|y|} = 2M \Rightarrow \int_0^\delta |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) \leq 2M \cdot 2\delta < +\infty.$$

• Μακριά από το 0: $\forall y \in (\delta, 1/2)$, έχουμε:

$$|\sin(ny)| \geq \sin(n\delta)$$

$$\Rightarrow \int_\delta^{1/2} |g_{x_0}(y)| d\lambda(y) \leq \underbrace{\leq \|f\|_{L^1(\pi)}}_{\leq \|f\|_{L^1(\pi)}} \leq \frac{1}{\sin(n\delta)} \cdot \left[\underbrace{\int_\delta^{1/2} |f(x_0 - y)| d\lambda(y)}_{\leq \|f\|_{L^1(\pi)}} + \underbrace{\int_\delta^{1/2} |f(x_0 + y)| d\lambda(y)}_{\leq \|f\|_{L^1(\pi)}} + |f^+(x_0)| + |f^-(x_0)| \right] < +\infty.$$



Άρα, όπως $\int_0^{1/2} |g_{x_0}| d\lambda = \int_0^\delta |g_{x_0}| d\lambda + \int_\delta^{1/2} |g_{x_0}| d\lambda < +\infty$,
 και επομένως $g_{x_0} \in L^1(\pi)$. ■

! Πόρισμα: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f^+(x_0), f^-(x_0), df^+(x_0), df^-(x_0) \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Τότε, } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}.$$