Για να δείξουμε το Θεώρημα του Fejér, πρέπει να δείξουμε κάποιες περαιτέρω ιδιότητες των συνελίξεων. Γι'αυτό μας χρειάζεται μια πολύ σημαντική ιδιότητα των p-νορμών:

→ Πρόταση: Έστω $1 \leq p \leq +\infty$. Τότε, $\forall\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue-μετρήσιμη,

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q = 1} \left| \int f \cdot g \, d\lambda \right| ,$$

όπου $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ (δηλ, όπου ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p).

⚠ Αυτό ισχύει ακόμη και όταν $\|f\|_p = +\infty$.

Απόδ: • $p=+\infty$: Άσκηση.

• Για $1\le p<+\infty$:

⇝ Αν $\|f\|_p=0$, τότε $f=0$ λ-σ.π. $\longrightarrow \int f\cdot g\, d\lambda=0 \ \forall g\in L^q(\mathbb{R})$.

⇝ Αν $0<\|f\|_p<+\infty$, τότε

$$\|f\|_p = \frac{\int |f|^p d\lambda}{\|f\|_p^{p-1}} = \int f\cdot \underbrace{\boxed{\frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}\cdot f}\,\chi_{\{f\neq 0\}}}}_{=:g} d\lambda$$

Παρατηρούμε ότι $\|g\|_q=1$. Πράγματι,

$$g = \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1} \cdot f} \chi_{\{f\neq 0\}} \Longrightarrow |g| = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \chi_{\{f\neq 0\}} .$$ Άρα:

- Αν $p=1$, τότε $|g| = \chi_{\{f\neq 0\}}$, άρα $\|g\|_\infty = 1$.

- Αν $p>1$, τότε $q<+\infty$, άρα

$$\int |g|^q \, d\lambda \underset{q=\frac{p}{p-1}}{=\!=\!=} \int_{\{f\neq 0\}} \left(\frac{|f|^{\cancel{p-1}}}{\|f\|_p^{\cancel{p-1}}} \right)^{\frac{p}{\cancel{p-1}}} d\lambda = \frac{1}{\cancel{\|f\|_p^p}} \cdot \cancel{\int_{\{f\neq 0\}} |f|^p \, d\lambda} = 1 .$$

⊙ Αν $\|f\|_p = +\infty$: Είτε $\|\mathrm{Re} f\|_p = +\infty$, είτε $\|\mathrm{Im} f\|_p = +\infty$.

Άρα, αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι πραγματική.

Τότε, είτε $\|f^+\|_p = +\infty$ είτε $\|f^-\|_p = +\infty$.

Άρα, αρκεί να υποθέσουμε ότι $\boxed{f \geq 0.}$

Έστω λοιπόν $f \geq 0$. Υπάρχει ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων, με $0 \leq s_n^p \nearrow f^p$ και $\int s_n^p \, d\lambda < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\underbrace{\|f\|_p}_{=+\infty} = \lim\limits_{n\to+\infty} \|s_n\|_p$. $\forall n\in\mathbb{N}$, αφού $\|s_n\|_p < +\infty$, από το

από Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

προηγούμενο βήμα $\exists$ g_n με $\|g_n\|_q = 1$ ώστε:

$$\|s_n\|_p = \int s_n g_n \, d\lambda.$$

Συγκεκριμένα, $g_n = \dfrac{s_n}{\|s_n\|_p^{p-1}} \chi_{\{s_n \neq 0\}} \geq 0$.

Άρα, αφού $f \geq s_n \geq 0$ και $g_n \geq 0$, έχουμε:

$$\int f g_n \geq \int s_n g_n = \|s_n\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$

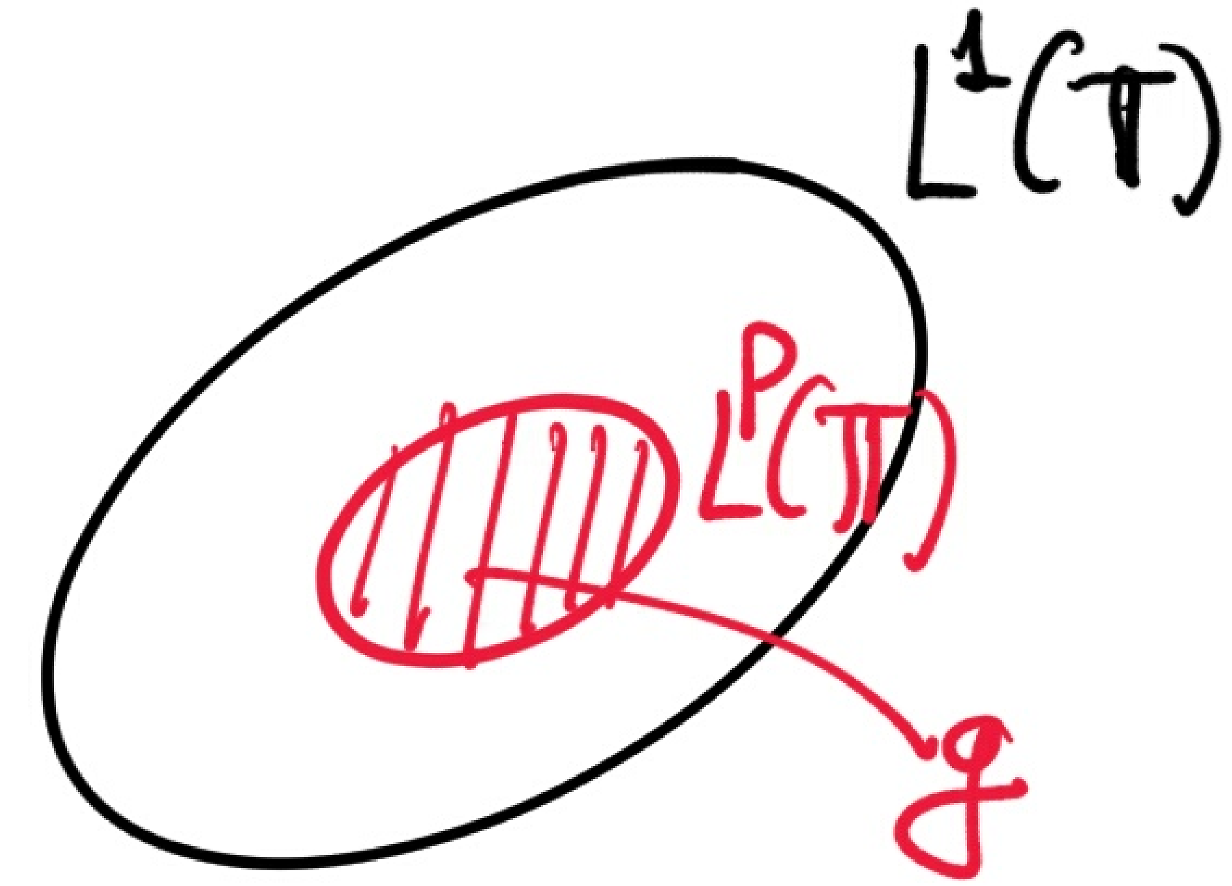
και επομένως $\int f g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty = \|f\|_p$. Άρα,

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int f g \, d\lambda \right| ,$$ όπως επιθυμούσαμε. ■

→ Πρόταση: Έστω $1 \le p \le +\infty$. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^p(\mathbb{T})$,

ισχύει ότι:
$$\boxed{\|f*g\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^p(\mathbb{T})}.}$$

⚠ Αυτό λέει πως, αν η g ζει στο μικρότερο χώρο $L^p(\mathbb{T}) \subsetneq L^1(\mathbb{T})$, τότε η $f*g$ επίσης ζει σε αυτό το μικρό χώρο ($L^p(\mathbb{T})$). Δηλ., η $f*g$ υιοθετεί την ωραία ιδιότητα της g. Αυτό είναι έκφραση του ότι η $f*g$



αποτελείται από μέσους όρους της g ως προς την f (και της f ως προς τη g), και άρα θα πρέπει εν γένει να παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από τις f, g.

Απόδ. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Τότε,

$$\|f*g\|_p = \sup_{\|h\|_q=1} \left| \int_{x\in[0,1)} f*g(x)\, h(x)\, d\lambda(x) \right|$$

$$= \sup_{\|h\|_q=1} \left| \int_{x\in[0,1)} \left(\int_{y\in[0,1)} f(y)\, g(x-y)\, d\lambda(y) \right) \cdot h(x)\, d\lambda(x) \right|$$

Fubini

(θα εξηγηθεί*)

$$\sup_{\|h\|_q=1} \left| \int_{y\in[0,1)} f(y) \underbrace{\left(\int_{x\in[0,1)} g(x-y)\, h(x)\, d\lambda(x) \right)}_{\leq \|g(\cdot-y)\|_p \cdot \|h\|_q = \|g\|_p \cdot 1} d\lambda(y) \right|$$

$$\leq \left| \int_{y\in[0,1)} f(y) \cdot \|g\|_p \, d\lambda(y) \right| = \|g\|_p \cdot \left| \int_{[0,1)} f \, d\lambda \right| \leq \|g\|_p \cdot \|f\|_1 .$$

* Το Θ. Fubini μπορεί πράγματι να χρησιμοποιηθεί, επειδή η $\phi : [0,1)^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\phi(x,y) = f(y)g(x-y)h(x) \quad \forall (x,y)\in[0,1)^2$,

ανήκει στον $L^1([0,1)^2)$: Όντως, η ϕ είναι Lebesgue-μετρή-σιμη, και

$$\int_{[0,1)^2} |\phi|\, d\lambda \underset{\left(|\phi| \text{ μετρήσιμη και } \geq 0\right)}{\overset{\text{Tonelli}}{=\!=\!=}} \int_{y\in[0,1)} \left[\int_{x\in[0,1)} \underbrace{|f(y)|\cdot|g(x-y)|\cdot|h(x)|}_{\overset{\shortparallel}{|\phi(x,y)|}}\, d\lambda(x)\right] d\lambda(y)$$

$$= \int_{y\in[0,1)} |f(y)| \cdot \underbrace{\left[\int_{x\in[0,1)} |g(x-y)|\cdot|h(x)|\, d\lambda(x)\right]}_{\overset{\leq}{\|g(\cdot-y)\|_p \cdot \|h\|_q = \|g\|_p}} d\lambda(y) \leq \|g\|_p \cdot \|f\|_1 < +\infty,$$

αφού $g\in L^p(\mathbb{T})$, $f\in L^1(\mathbb{T})$. ∎

Τώρα, θυμόμαστε πως ο N-οστός Cesàro μέσος

$$\sigma_N(f;x) := \frac{s_0(f;x)+s_1(f;x)+\dots+s_{N-1}(f;x)}{N}$$

της σειράς Fourier της f ισούται με $f * F_N(x)$, όπου F_N είναι ο πυρήνας του Fejér στο N, και έτσι αναδιατυπώνουμε το θεώρημα του Fejér ως εξής:

Θεώρημα του Fejér : Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη, 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)}|f|\,d\lambda<+\infty$.

(i) Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ τα $f^+(x_0)$, $f^-(x_0)$, τότε

$$f*F_N(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{f^+(x_0)+f^-(x_0)}{2}.$$

(ii) Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε

$$f*F_N(x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}f(x_0).$$

(iii) Αν $f\in C(\mathbb{T})$, τότε

$$\|f*F_N-f\|_\infty\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

(iv) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\| f * F_N - f \|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

(v) Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, για κάποιο $1 < p < +\infty$, τότε

$$\| f * F_N - f \|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

Πολλά από αυτά ισχύουν και για πιο γενικούς πυρήνες.

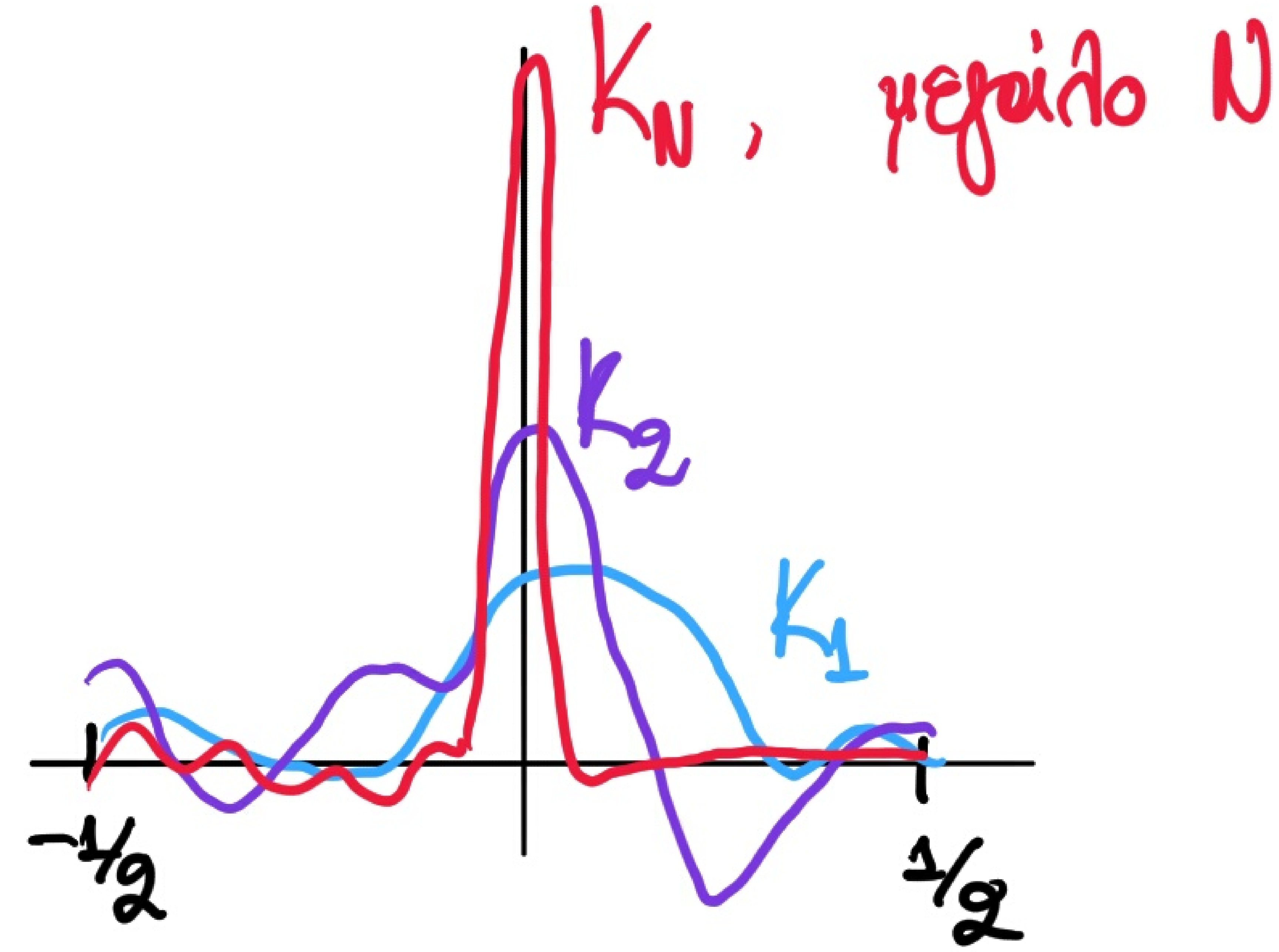
→ **Ορισμός:** Μια ακολουθία $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 1-περιοδικών συναρτήσεων λέγεται ακολουθία καλών πυρήνων αν ικανοποιεί τα εξής:

① $\displaystyle\int_{[-1/2,1/2)} K_N \, d\lambda = 1 \quad , \quad \forall N\in\mathbb{N}.$

② $\exists \; B\in\mathbb{R}$ ώστε: $\displaystyle\int_{[-1/2,1/2)} |K_N|\, d\lambda \leq B, \quad \forall N\in\mathbb{N}.$

③ $\displaystyle\forall \delta>0, \int_{\delta\leq|x|\leq\frac{1}{2}} |K_N|\, d\lambda \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 .$

Η ακολουθία $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ των πυρήνων του Fejér είναι ακολουθία καλών πυρήνων.



→ **Θεώρημα** (συμπεριφορά συνέλιξης με καλούς πυρήνες):

Έστω $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ακολουθία καλών πυρήνων. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 1-περιοδική, μετρήσιμη, με $\int_{[0,1)}|f|\,d\lambda<+\infty$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι φραγμένη, και συνεχής στο x_0, τότε

$$f * K_N(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} f(x_0).$$

(ii) Αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε

$$\| f * K_N - f \|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

(iii) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\| f * K_N - f \|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

(iv) Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, για κάποιο $1 < p < +\infty$, τότε

$$\| f * K_N - f \|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

Αποδ.: (i) f φραγμένη $\Longrightarrow$ $\exists\ M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq M\ \forall x \in \mathbb{R}$. Και:

$$\left| f * K_N(x_0) - f(x_0) \right| \underset{\substack{\int_{[-1/2,1/2)} K_N(y)\,d\lambda(y) = 1}}{=} \left| \int_{[-1/2,1/2)} f(x_0-y) K_N(y)\,d\lambda(y) - \int_{[-1/2,1/2)} f(x_0) K_N(y)\,d\lambda(y) \right|$$

$$\leq \int_{[-1/2,1/2)} |f(x_0-y) - f(x_0)| \cdot |K_N(y)|\,d\lambda(y).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. f συνεχής στο x_0 $\Longrightarrow$ $\exists\ \delta = \delta(x_0) > 0$ ώστε:

$\forall\ |y| < \delta$, έχουμε $|f(x_0-y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα,

$$|f * K_N(x_0) - f(x_0)| \leq I_{1,N} + I_{2,N}, \quad \text{όπου}$$

$$I_{1,N} := \int_{|y|<\delta} \underbrace{|f(x_0-y) - f(x_0)|}_{<\varepsilon} \cdot |K_N(y)| \, d\lambda(y)$$

$$\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\int_{|y|<\delta} |K_N(y)| \, d\lambda(y)}_{\leq \int_{[-1/2,1/2)} |K_N(y)| d\lambda(y) \leq B} \leq B \cdot \varepsilon, \quad \text{και}$$

$$I_{2,N} := \int_{\delta \leq |y| \leq 1/2} \underbrace{|f(x_0-y) - f(x_0)|}_{\leq 2M} \cdot |K_N(y)| \, d\lambda(y) \leq$$

$$\leq 2M \cdot \underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} |K_N(y)| \, d\lambda(y)}_{\substack{\downarrow N \to +\infty, \\ 0}} \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0.$$

άρα $< \varepsilon/2M$ για $N \geq$ από κατάλληλο N_0

Επομένως, $\left| f * K_N(x_0) - f(x_0) \right| \leq (B+1) \cdot \varepsilon, \quad \forall N \geq N_0.$

Άρα, $\left| f * K_N(x_0) - f(x_0) \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, δηλ.

$$f * K_N(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} f(x_0).$$

(ii) Έστω ότι $f \in C(\mathbb{T})$. f συνεχής στο $[-1/2, 1/2]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, $\forall \varepsilon > 0$, το δ του (i) είναι ανεξάρτητο του $x_0 \in \mathbb{R}$. Άρα, ακολουθώντας ξανά την απόδειξη του (i), έχουμε πως $\exists\, \delta > 0$ ώστε: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$|f * K_N(x_0) - f(x_0)| \leq \underbrace{\int_{|y|<\delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot |K_N(y)|\, d\lambda(y)}_{\leq B \cdot \varepsilon \text{, όπως στο (i)}} +$$

$$+ \int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} \underbrace{|f(x_0 - y) - f(x_0)|}_{\leq 2M} \cdot |K_N(y)|\, d\lambda(y) \leq$$

$$\leq B\cdot\varepsilon + 2M \int_{\delta\leq|y|\leq\frac{1}{2}} |K_N(y)|\, d\lambda(y),$$ όπου το δ δεν

εξαρτάται από το x_0. Άρα,

$$\| f*K_N(x_0) - f(x_0)\|_\infty \leq B\varepsilon + 2M\cdot \int_{\delta\leq|y|\leq\frac{1}{2}} |K_N(y)|\, d\lambda(y).$$

Αφού $\displaystyle\int_{\delta\leq|y|\leq\frac{1}{2}} |K_N(y)|\, d\lambda(y) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, $\exists\, N_0\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\int_{\delta\leq|y|\leq\frac{1}{2}} |K_N(y)|\, d\lambda(y) < \varepsilon/2M, \quad \forall N\geq N_0.$$ Άρα,

$$\| f * K_N - f \|_\infty < \varepsilon \quad , \quad \forall N \geq N_0 .$$

Επομένως, $\| f * K_N - f \|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

(iii) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists\, g \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\| f - g \|_1 < \varepsilon .$$

εννοούμε $L^1(\mathbb{T})$

Άρα, $\| f * K_N - f \|_1 \leq \| f * K_N - g * K_N \|_1 + \| g * K_N - g \|_1 + \| g - f \|_1$

- $\| g - f \|_1 < \varepsilon$.
- $\| g * K_N - g \|_1 \leq \| g * K_N - g \|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. Άρα, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε,

$g \in C(\mathbb{T})$!

$\forall N \geq N_0$, να ισχύει ότι: $\| g * K_N - g \|_1 < \varepsilon$.

- $\| f * K_N - g * K_N \|_1 = \| (f-g) * K_N \|_1 \leq \underbrace{\| f-g \|_1}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\| K_N \|_1}_{\leq B} \leq B \cdot \varepsilon$.

Άρα, $\| f * K_N - f \|_1 < (B+2)\varepsilon$, $\quad \forall N \geq N_0$.

Άρα, $\| f * K_N - f \|_1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

(iii) Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\| f-g \|_p < \varepsilon$.

Άρα, $\| f * K_N - f \|_p \leq \| f * K_N - g * K_N \|_p + \| g * K_N - g \|_p + \| g - f \|_p$.

- $\|g-f\|_p < \varepsilon$.
- $\| g * K_N - g \|_p \leq \|g * K_N - g\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. $g \in C(\mathbb{T})$ Άρα, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall\, N \geq N_0, \quad \| g * K_N - g \|_p < \varepsilon$.

- $\| f * K_N - g * K_N \|_p = \| (f-g) * K_N \|_p \leq \underbrace{\|f-g\|_p}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|K_N\|_1}_{\leq B} \leq B\varepsilon$.

Άρα,

$$\| f * K_N - f \|_p < (B+2)\varepsilon, \quad \forall\, N \geq N_0.$$

Επομένως, $\| f * K_N - f \|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. ∎

→ Αποδ. του Θ. Fejér:

Οι ισχυρισμοί (iii), (iv) και (v) προκύπτουν άμεσα από το ότι η $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.

Αρκεί να δειχθεί το (i) (προκύπτει τότε και το (ii)).

Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν τα $f^+(x_0)$, $f^-(x_0)$ και ανήκουν στο $\mathbb{C}$.

Έστω $\varepsilon>0$. Ξέρουμε ότι:

$$f*F_N(x_0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0-y)\,F_N(y)\,d\lambda(y) = \underbrace{\int_{-1/2}^{0} f(x_0-y)F_N(y)\,d\lambda(y)}_{y=-u,\ F_N \text{ άρτια}} + \int_{0}^{1/2} f(x_0-y)F_N(y)\,d\lambda(y)$$

$$= \int_0^{1/2} f(x_0+y)\, F_N(y)\, d\lambda(y) + \int_0^{1/2} f(x_0-y)\, F_N(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_0^{1/2} \left[f(x_0+y) + f(x_0-y) \right] F_N(y)\, d\lambda(y).$$

Επίσης, $\dfrac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} = \left[f^+(x_0) + f^-(x_0) \right] \cdot \displaystyle\int_0^{1/2} F_N(y)\, d\lambda(y).$

Άρα, $\left| f * K_N(x_0) - f(x_0) \right| \leq \displaystyle\int_0^{1/2} \Big[\left| f(x_0+y) - f^+(x_0) \right| + \left| f(x_0-y) - f^-(x_0) \right| \Big] F_N(y)\, d\lambda(y).$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta > 0$ ώστε:

$$\left.\begin{aligned} &|f(x_0+y)-f^+(x_0)|<\varepsilon \\ \text{και } &|f(x_0-y)-f^-(x_0)|<\varepsilon \end{aligned}\right\},\quad \forall\ |y|<\delta. \quad \text{Άρα,}$$

$$\left| f * F_N(x_0) - \frac{f^+(x_0)+f^-(x_0)}{2} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_{|y|<\delta} \Big[|f(x_0+y)-f^+(x_0)| + |f(x_0-y)-f^-(x_0)| \Big] \cdot F_N(y)\, d\lambda(y)}_{=:\, I_{1,N}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\delta \leq |y| \leq \frac{1}{2}} \Big(|f(x_0+y)| + |f^+(x_0)| + |f(x_0-y)| + |f^-(x_0)| \Big) F_N(y)\, d\lambda(y).}_{=:\, I_{2,N}}$$

Και:

$$I_{1,N} \leq \int_{|y|<\delta} 2\varepsilon \cdot F_N(y) = 2\varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} F_N(y)\,d\lambda(y) \overset{F_N \geq 0}{\leq} 2\varepsilon \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} F_N(y)\,d\lambda(y)}_{=1} = 2\varepsilon,$$

$$I_{2,N} \leq \frac{1}{N\delta^2} \cdot \Big[\overbrace{\int_{-1/2}^{1/2} |f(x_0+y)|\,d\lambda(y)}^{= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}} + \overbrace{\int_{-1/2}^{1/2} |f^+(x_0)|\,d\lambda(y)}^{= |f^+(x_0)|} + \overbrace{\int_{-1/2}^{1/2} |f(x_0-y)|\,d\lambda(y)}^{= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}} +$$

$$+ \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} |f^-(x_0)|\,d\lambda(y)}_{= |f^-(x_0)|} \Big]$$

$F_N(y) \leq \dfrac{1}{Ny^2}$ στο $(0, 1/2]$,

άρα $F_N(y) \leq \dfrac{1}{N\delta^2}$ στο $[\delta, \frac{1}{2}]$,

και το ίδιο στο $[-1/2, \delta]$ (F_N άρτια)

$$= \frac{1}{N} \cdot \underbrace{\frac{1}{\delta^2}}_{<+\infty} \underbrace{\left(2\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + |f^+(x_0)| + |f^-(x_0)| \right)}_{<+\infty} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 .$$

Επομένως, $\exists \; N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, $\forall N \geq N_0$, $I_{2,N} < \varepsilon$.

Άρα, $\forall \; N \geq N_0$, $\left| f * F_N(x_0) - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \right| < 2\varepsilon$.

Άρα, $f * F_N(x_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}$.

$\blacksquare$

! Δύο σημαντικές συνέπειες του Θεωρήματος του Fejér είναι:

1. Το Θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass. Κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται οσοδήποτε καλά ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (τα $\sigma_N(g;\cdot)$). Κάθε <u>τριγωνομετρικό πολυώνυμο</u> είναι της μορφής

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-N}^{N} a_k \left(\cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x) \right).$$

Τα $\cos(2\pi k x), \sin(2\pi k x)$ προσεγγίζονται οσοδήποτε καλά, ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, από <u>πολυώνυμα</u> (πολυώνυμα Taylor των

$\cos(2\pi k x)$, $\sin(2\pi k x)$). Άρα, κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο προσεγγίζεται οσοδήποτε καλά από πολυώνυμα (ως προς την $\|\cdot\|_\infty$).

Άρα, κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται οσοδήποτε καλά από πολυώνυμα ως προς την $\|\cdot\|_\infty$. Αυτό εύκολα επεκτείνεται σε κάθε $g \in C([a,b])$.

② $\|s_N(f;\cdot) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, δηλ. $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k \cdot}$ στον $L^2(\mathbb{T})$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$.

Από Θ. Fejér, $\|\sigma_N(f;\cdot) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$.

Όμως, το $\sigma_N(f;\cdot)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\leq N$.

Άρα, $\|s_N(f;\cdot) - f\|_2 \leq \|\sigma_N(f;\cdot) - f\|_2$.

το $s_N(f;\cdot)$ είναι το
τριγ. πολ. βαθμού $\leq N$
που απέχει λιγότερο από
την f

Επομένως, $\boxed{\|s_N(f;\cdot) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$ επίσης.

Θα δούμε αυτές τις συνέπειες πιο αναλυτικά.

Συνέπεια 1 του Θ. Fejér:

Θεώρημα: $\forall f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|s_N(f;\cdot) - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Δηλ. $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, \phi_k$ στον $L^2(\mathbb{T})$, $\phi_k = e^{2\pi i k \cdot}$

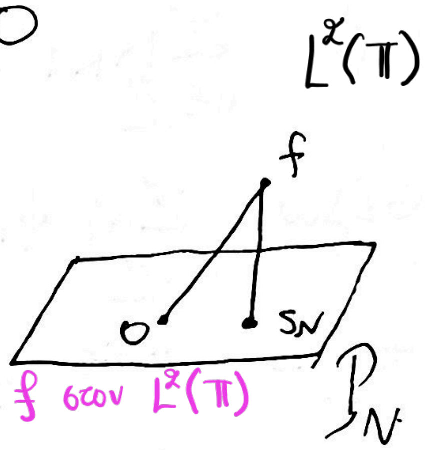
(Προκύπτει ότι $L^2(\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_k : a_k \in \ell^2 \right\}$)

Απόδειξη: $\|\underbrace{\sigma_N(f;\cdot)}_{\text{τριγ. πολ. βαθμού} \le N} - f\|_2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

$\le$

$\|s_N(f;\cdot) - f\|_2$

→ αυτό είναι το τριγ. πολ. βαθμού $\le N$ που απέχει το λιγότερο από την f στον $L^2(\mathbb{T})$



Θεώρημα Parseval: $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2}$$

δηλ. $$\int_{[0,1)} |f|^2 \, d\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2.$$

$$\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)\phi_k$$

Απόδειξη: $s_N(f;\cdot) \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_2} f \Rightarrow \|s_N(f;\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{N\to+\infty} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

δηλ. $$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

<u>Πόρισμα</u>: $L^2(\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \phi_k : (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \right\}$

↳ όριο ως προς τη $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$

<u>Απόδειξη</u>:

"$\subseteq$" έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$, ξέρω $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\phi_k$

και $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, καθώς $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} < +\infty$.

"$\supseteq$" έστω $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

δηλ. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty$

Θέλω $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \phi_k \in L^2(\mathbb{T})$.

πρέπει ν.δ.ο. για $S_N = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k \phi_k$, $\forall N \in \mathbb{N}$,

η $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$.

Θ.δ.ο. η $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$:

έστω $n \geq m \in \mathbb{N}$. $\|S_n - S_m\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} \alpha_k \phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})}$

$\overset{\text{Π.Θ.}}{=} \left(\sum_{m+1 \leq |k| \leq n} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[m,n \to +\infty]{} 0$ γιατί $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < +\infty$

Ο $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$ είναι Banach, άρα η $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, $\exists f \in L^2(\mathbb{T})$ με $\|S_N - f\|_2 \xrightarrow{N \to +\infty} 0$

Αυτό σημαίνει: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \phi_k = f$ στον $L^2(\mathbb{T})$.

<u>Πόρισμα</u>: Ο $\hat{}:(L^2(\mathbb{T}),\|\cdot\|_2)\longrightarrow(\ell^2,\|\cdot\|_{\ell^2})$

με $f \longrightarrow (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

είναι ~~γραμμική~~ επί <u>ισομετρία</u> (ισομετρικός ισομορφισμός)
($\Rightarrow$ 1-1)

<u>Απόδειξη</u>:

• <u>Ισομετρία</u>: $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}=\|(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2}$ ✓ (Parseval)

• $\|f-g\|_{L^2(\mathbb{T})}=\|(\hat{f}(k)-\hat{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2}$.

Άρα, αν $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}\neq(\hat{g}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

το δεξί μέλος είναι $\neq 0$

$\Rightarrow \|f-g\|_{L^2(\mathbb{T})}\neq 0 \Rightarrow f\neq g$ στον $L^2(\mathbb{T})$.

• <u>επί</u>: έστω $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ στον ℓ^2. Θέλω να βρω $f\in L^2(\mathbb{T})$ ώστε $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}=(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, δηλ. με $\hat{f}(k)=\alpha_k$, $k\in\mathbb{Z}$

Η $f:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\phi_k\in L^2(\mathbb{T})$, και $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\hat{f}(k)=\alpha_k$:

$$|\hat{f}(k)-\alpha_k|=|\hat{f}(k)-\hat{S}_N(k)|=\left|\int_0^1(f(x)-S_N(x))e^{-2\pi ikx}\,d\lambda(x)\right|$$

$S_N=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k\phi_k$, τριγ πολ.

$\hat{S}_N(k)=\alpha_k, \forall N\geq k$

$$\leq\int_0^1|f(x)-S_N(x)|\,d\lambda(x)=\|f-S_N\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

$$\leq\|f-S_N\|_{L^2(\mathbb{T})}\xrightarrow{N\to+\infty}0$$

Άρα $\hat{f}(k)=\alpha_k$ (άλλος τρόπος: $\hat{f}(m)=\langle f,\phi_m\rangle=\dots$)