

Άσκηση : Ν.δ.ο.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

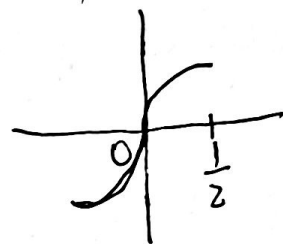
$$f(x) = x \text{ στο } [0, 1)$$

$$f(x) = |x|, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$f(x) = x(\frac{1}{2} - x)$$

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2})$$

περιτενύσσω $[-\frac{1}{2}, 0]$



Πρόβλημα Parseval :

$$\forall f, g \in L^2(\pi) : \langle f, g \rangle_{\pi} = \langle (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}, (\hat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \rangle_{\ell^2}$$

$$\int_0^1 f \bar{g} \, d\mu \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}$$

Απόδειξη $\langle f, g \rangle_{\pi} = \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i \|f+ig\|_2^2 - i \|f-ig\|_2^2$

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) + \hat{g}(k)|^2 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)|^2 + \\ &+ i \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) + i \hat{g}(k)|^2 - i \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k) - i \hat{g}(k)|^2 \end{aligned}$$

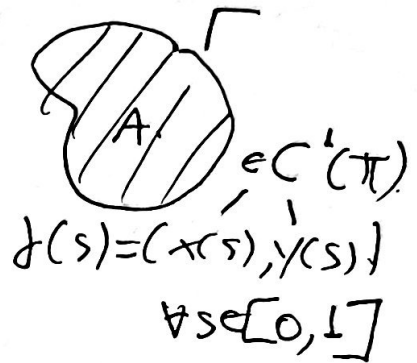
Από Parseval $\langle f, g \rangle_{\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}$

Εφαρμογή του Θ. Parseval:

Η Ισοπεριμετρική ανισότητα.

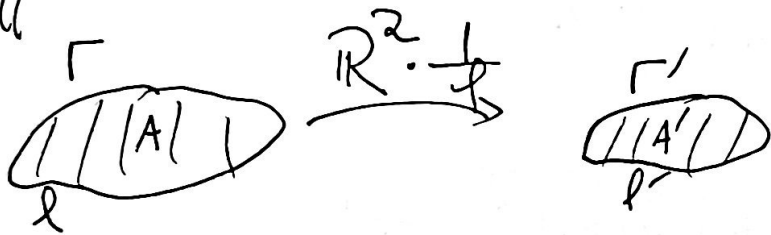
Έστω Γ μία C^1 κλειστή, απλή και καμπύλη με μήκος l . Έστω A το εμβαδόν που περικλείει η Γ . Τότε:

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi} \quad (\text{ισχύει όταν } \Gamma \text{ κύκλος})$$



Απόδειξη: Μπορώ να υποθέσω ότι $l=1$

Αλλιώς



καινούριο μήκος:

$$l' = \frac{1}{l} \cdot l = 1$$

$$A' = \left(\frac{1}{l}\right)^2 \cdot A = \frac{A}{l^2}$$

Άρα αν δείξω για τη Γ' ότι $A' \leq \frac{l'^2}{4\pi}$
ισοδύναμα έχω:

$$\frac{A}{l^2} \leq \frac{1^2}{4\pi} \Leftrightarrow A \leq \frac{l^2}{4\pi}$$

Έστω τέτοια Γ με μήκος 1, θέλω $A \leq \frac{1}{4\pi}$.

∃ παραμετρηση της Γ : $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ που

είναι C^1

Άρα $f(s) = (x(s), y(s))$, όπου $x, y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
και είναι C^1

$$\Rightarrow \sqrt{x^2(s) + y^2(s)} = 1 \Rightarrow x^2(s) + y^2(s) = 1, \forall s \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2(s) + y^2(s)) ds = 1.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(s) ds + \int_0^1 y^2(s) ds = 1 \Rightarrow$$

Από από Parseval,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{x}(k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{y}(k)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} [|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2] \right) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 [|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2] = \frac{1}{4\pi^2} \quad (l=1) \checkmark$$

$$\leadsto \text{Θεώρημα Green} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [x(s)y'(s) - y(s)x'(s)] ds =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle \right) \stackrel{\text{Parseval}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}(k) \overline{\hat{y}'(k)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{y}(k) \overline{\hat{x}'(k)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}(k) \overline{2\pi i k \hat{y}(k)} - \hat{y}(k) \overline{2\pi i k \hat{x}(k)} \right) \\
 &= \pi i \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)} - \overline{\hat{x}(k)} \cdot \hat{y}(k) \right)}_{2i \operatorname{Im}(\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (A = |A|) &= 2\pi \cdot \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot \operatorname{Im}(\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)}) \right| \leq \\
 &\stackrel{\text{r.p.f.}}{\leq} 2\pi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \cdot \underbrace{\left| \operatorname{Im}(\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)}) \right|}_{\leq |\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)}|} \leq \\
 &\stackrel{\text{r.M.-A.M}}{\leq} 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \cdot |\hat{x}(k) \cdot \overline{\hat{y}(k)}| \leq 2\pi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \frac{|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2}{2} \\
 &\stackrel{|k| \leq |k|^2}{\forall k \in \mathbb{Z}} \leq \pi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 [|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2] = \pi \cdot \frac{1}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{l^2}{4\pi} \right) \checkmark
 \end{aligned}$$

für $1 \leq k \leq l$: $|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2 = 0, \forall k \neq 0, \pm 1.$

$$\Rightarrow \hat{x}(k) = 0 \text{ und } \hat{y}(k) = 0, \forall k \neq 0, \pm 1.$$

'A.p.p.: $x, y \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow x = S(x), y = S(y)$

$$\begin{aligned}
 \text{z.p.p. } x(s) &= \hat{x}(-1)e^{-2\pi i s} + \hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{2\pi i s} = \\
 \hat{x}(-1) &= \overline{\hat{x}(1)} \quad = \hat{x}(0) + \left(\hat{x}(1)e^{2\pi i s} + \overline{\hat{x}(1)}e^{2\pi i s} \right) = \\
 &= \hat{x}(0) + 2 \operatorname{Re}(\hat{x}(1)e^{2\pi i s}) = \hat{x}(0) + 2 \operatorname{Re}[\hat{x}(1) \cdot (\cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s))] \\
 \bullet \quad y(s) &= \hat{y}(0) + 2 \operatorname{Re}(\hat{y}(1)e^{2\pi i s}) = \hat{y}(0) + 2 \operatorname{Re}[\hat{y}(1) \cdot (\cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s))]
 \end{aligned}$$

$$\leadsto |\hat{x}(1)| = |\hat{y}(1)| \Rightarrow$$

$$|\hat{x}(1)|^2 + |\hat{y}(1)|^2 + |\hat{x}(-1)|^2 + |\hat{y}(-1)|^2 = \frac{1}{16\pi^2}$$

$$\Rightarrow 4|\hat{x}(1)|^2 = \frac{1}{\cancel{16}\pi^2} \Rightarrow |\hat{x}(1)| = \frac{1}{4\pi}.$$

$$\leadsto \hat{x}(1) = \frac{e^{i\theta_1}}{4\pi}, \hat{y}(1) = \frac{e^{i\theta_2}}{4\pi}$$

$$\text{Re}(\hat{x}(1), \hat{y}(1)) = 0$$

Κλείνουμε την ανάλυση των σειρών Fourier με μια ακόμη

Συνέχεια του Θεωρήματος του Fejér:

→ Το προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass: Έστω $g \in C([a, b])$.

Τότε, υπάρχει πολυώνυμο $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\|g - p\|_{\infty} < \varepsilon$.

Επιπλέον, αν η g παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο p πραγματικό.

Απόδ.: Το δείχνουμε για όλες τις $g \in C([0, 1])$. Με ένα απλό επιχείρημα αλλαγής μεταβλητής, θα προκύψει για όλες τις $g \in C([a, b])$, $\forall a < b$ στο $\mathbb{R}$.

Η μεθοδολογία που περιγράψαμε λειτουργεί $\forall g \in C(\pi)$. Τέτοιες g είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, αλλά έχουν την περαιτέρω ιδιότητα να $g(0) = g(1)$ (δηλ., $C(\pi) \subsetneq C([0, 1])$).

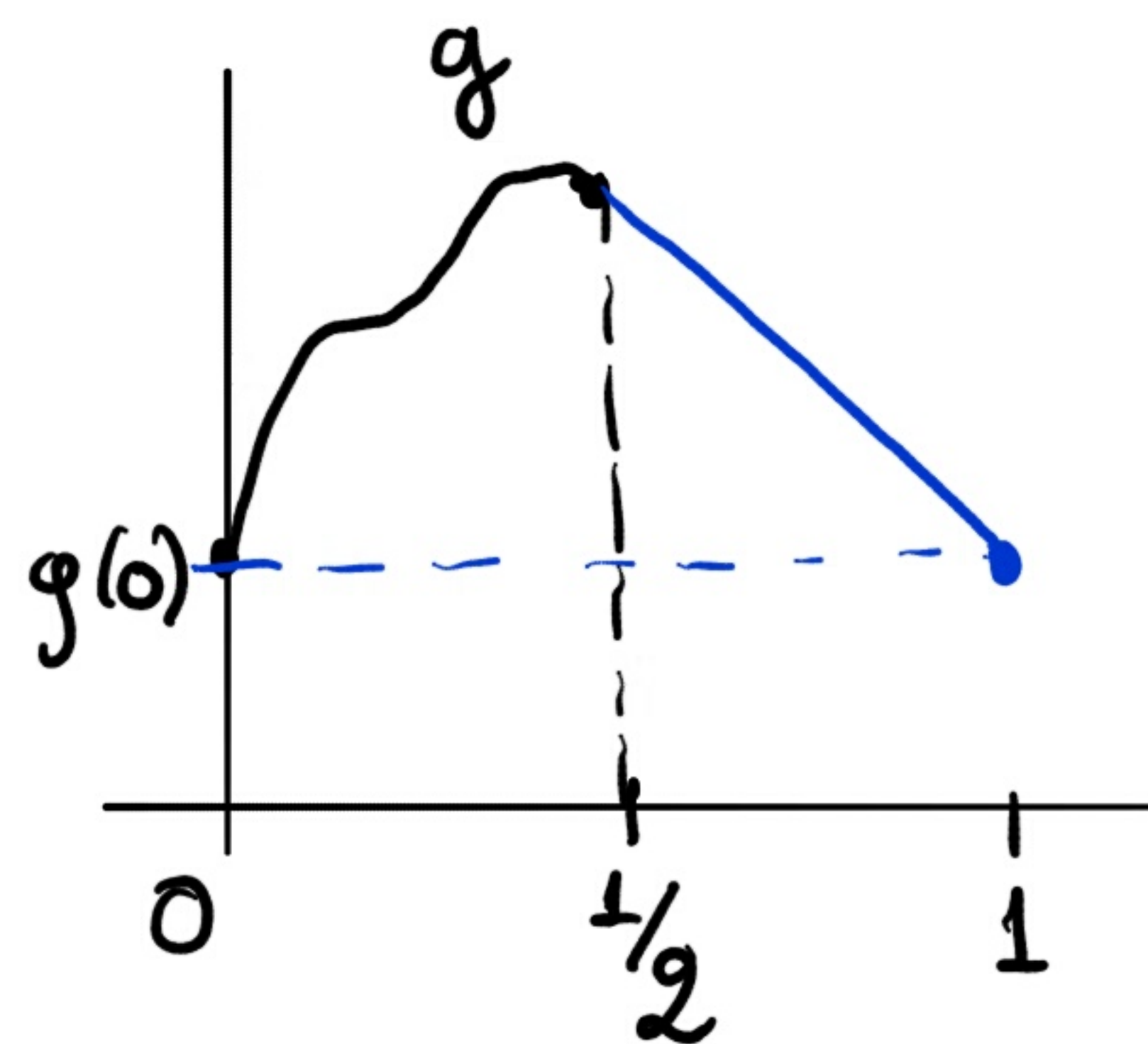
Κάνουμε ένα trick για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα:

Βήμα 1: Δείχνουμε το θεώρημα $\forall g \in C([0, 1/2])$, επεκτείνοντάς την σε κάποια $\tilde{g} \in C(\pi)$.

Βήμα 2: Κάνουμε μια αλγή μετασχηματισμού, που μετατρέπει το $[0, 1/2]$ στο $[0, 1]$. Έτσι, παίρνουμε το θεώρημα $\forall g \in C([0, 1])$.

Αναλυτικότερα:

Βήμα 1: Έστω $g \in C([0, 1/2])$. Επεκτείνουμε τη g σε μια



$\tilde{g} \in C(\mathbb{T})$, ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1/2], \\ \tilde{g}(1) = g(0), \quad \text{και} \\ \text{το γράφημα της } \tilde{g} \text{ στο } [1/2, 1] \text{ να είναι} \\ \text{το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει} \\ \text{το } (1/2, g(1/2)) \text{ με το } (1, \underset{g(0)}{\tilde{g}(1)}). \end{array} \right.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η $\tilde{g} \in C(\mathbb{T}) \Rightarrow \exists$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-N}^N a_k (\cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x))$$

(για κάποιο $N \in \mathbb{N}$), με $\|\tilde{g} - p\|_{\infty} < \varepsilon$.

Ξέρουμε ότι

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

δηλ. ότι οι συναρτήσεις $\cos$ και $\sin$ είναι ίδες με τις γειρε's
 Taylor τους, και μάλιστα ότι η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη
 σε κάθε κλειστό διάστημα. Επομένως, για κάποιο τεράστιο $M \in \mathbb{R}$
 (που θα προσδιοριστεί αργότερα), $\forall k \in \{-N, -N+1, \dots, 0, 1, \dots, N\}$,
 υπάρχουν πολυώνυμα $p_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ και $\phi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 (μερικά αθροίσματα των σειρών Taylor των $\cos(2nkx)$ και
 $\sin(2nkx)$, αντίστοιχα), ώστε

$$\|\cos(2nk \cdot) - p_k\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{και} \quad \|\sin(2nk \cdot) - \phi_k\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{M}.$$

$\swarrow$
 $\swarrow$
 sup νόρμα στο $[0, 1]$

Επομένως, $\| \tilde{g} - \underbrace{\sum_{k=-N}^N a_k (p_k + i \phi_k)}_{p := \text{sup νόρμα στο } [0, 1]} \|_{\infty} \leq$

$$\leq \| \tilde{g} - p \|_{\infty} + \sum_{k=-N}^N |a_k| \cdot \| \cos(2\pi k \cdot) - p_k \|_{\infty} + \sum_{k=-N}^N |a_k| \cdot \| \sin(2\pi k \cdot) - \phi_k \|_{\infty}$$

$$< \varepsilon + \left[2 \sum_{k=-N}^N |a_k| \right] \frac{\varepsilon}{M} < 2\varepsilon, \quad \text{για } M := 2 \sum_{k=-N}^N |a_k| + 1.$$

Επομένως, περιορίζοντας στο $[0, 1/2]$, έχουμε: $\| g - p_{|[0, 1/2]} \|_{\infty} < \varepsilon.$

Βήμα 2: Έστω $g \in C([0,1])$. Τότε, η $g_0: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{C}$

με $g_0(t) = g(2t) \quad \forall t \in [0, 1/2]$, είναι συνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Βήμα 1, $\exists p: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{C}$ πολυώνυμο,

με $\|g_0 - p\|_\infty < \varepsilon$, άρα με:

$\hookrightarrow \sup$ νόημα
στο $[0, 1/2]$

$$|g_0(t) - p(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/2].$$

$$\text{Ισοδύναμα: } |g(2t) - p(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/2].$$

Αρα, θέτοντας $2t = x$, έχουμε ότι

$$|g(x) - p(\frac{x}{2})| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Αρα, $\|g - \tilde{p}\|_{\infty} < \varepsilon$, όπου το $\tilde{p}$ είναι το πολυώνυμο

$$p(\frac{\cdot}{2}).$$

sup νόρμα
στο $[0, 1]$.

■