

① Υπενθύμιση: $L^2(\mathbb{T}) = \left\{ \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k}_{\text{συνεκλίση ως προς } \|\cdot\|_2, \text{ όχι κ.σ.}} : (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 \right\},$

και, $\forall \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k \in L^2(\mathbb{T}), \quad \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}$

② Θεωρούμε την 1-περιοδική $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, με $f(x) = |x| \quad \forall x \in [-1/2, 1/2)$.

Έχει δείξει (Φυλλαδίο 1) ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x=0. \\ 0, & x \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}.$$

(α) Υπολογίστε το $\sum_{\substack{k \text{ περιττός} \\ \text{φύσιος}}} \frac{1}{k^4}.$

(β) Βρείτε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο p , βαθμού ≤ 2 , που ανέχει το ελάχιστο από την f στον $L^2(\mathbb{T})$. Επιπλέον, υπολογίστε την απόσταση $\|f - p\|_{L^2(\mathbb{T})}.$

Λύση: (α) Ξέρουμε ότι $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 =$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sum_{\substack{k \text{ περιττός} \\ \text{ακέραιος}}} \left| -\frac{1}{\pi^2 k^2} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + 2 \sum_{\substack{k \text{ περιττός} \\ \text{φυσικός}}} \frac{1}{n^4 k^4}$$

$$\text{Αφού } \|f\|_{L^2(\pi)}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |x|^2 dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{x^3}{3} \right)' dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \text{ παίρνουμε ότι:}$$

$$2 \cdot \sum_{\substack{k \text{ περιττός} \\ \text{φυσικός}}} \frac{1}{n^4 k^4} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k \text{ περιττός} \\ \text{φυσικός}}} \frac{1}{k^4} = \frac{n^4}{2 \cdot 4 \cdot 12} = \frac{n^4}{96}$$

$$(b) \quad p(x) = s_2(f; x) = \sum_{k=-2}^2 \hat{f}(k) e^{-2\pi i k x} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} e^{-2\pi i x} - \frac{1}{n^2} e^{2\pi i x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\|f - p\|_{L^2(\pi)}^2 = \|f - s_2(f; \cdot)\|_{L^2(\pi)}^2 = \left\| \sum_{|k| \geq 3} \hat{f}(k) \phi_k \right\|_{L^2(\pi)}^2 =$$

$$\stackrel{\text{Ασκ. ①}}{=} \sum_{|k| \geq 3} |\hat{f}(k)|^2 = \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2}_{\|f\|_{L^2(\pi)}^2} - \sum_{|k| \leq 2} |\hat{f}(k)|^2 =$$

$$= \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^4} \right) .$$

