Μετασχηματισμός Fourier:

Ορ: έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Ορίζουμε $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}\, d\lambda(x)$$

$$\left(\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x}\, d\lambda(x). \right)$$

⚠ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, ο $\hat{f}(\xi)$ λέγεται ο μετασχηματισμός Fourier της f στο ξ και ορίζεται καλά:

$f \cdot e^{-2\pi i \langle \xi, \cdot \rangle}$ είναι μετρήσιμη και

$$\int |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}|}_{= 1}\, d\lambda(x) = \|f\|_1 < +\infty$$

$$e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} = e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} = \qquad \begin{matrix} \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \\ x = (x_1, \dots, x_n) \end{matrix}$$

$$= e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdot e^{-2\pi i x_2 \xi_2} \cdot \dots \cdot e^{-2\pi i x_n \xi_n}$$

<u>Ερωτήματα</u>: 1) $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$, για ποια x έχω

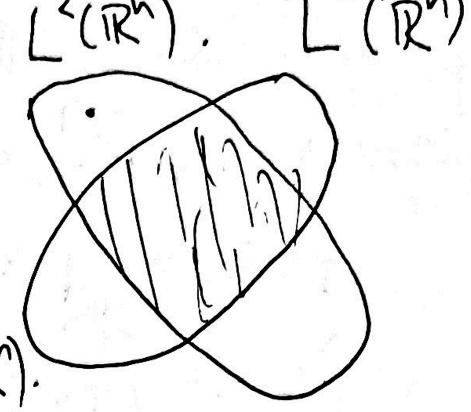
$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \; ;$$

Τώρα: Θ.δ.ο $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για λ-σχεδόν κάθε x

$$f(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle}\, d\lambda(\xi)$$

$\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|\hat{f}(k)_k\|_{\ell^2}$

τώρα: $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$



$\hookrightarrow$ πώς θα ορίζεται $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ αλλά όχι στον $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Βασική ιδιότητα

⊙ $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$.

⚠ Στην πράξη για $f \in L^1(\mathbb{R})$, πώς υπολογίζω το $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x)\, d\lambda(x)$

έχω $\hat{f}(\xi) = \lim_{N \to +\infty} \left(\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i \xi x} f(x)\, d\lambda(x) \right)$.

$$\| $$

$\forall N \in \mathbb{N}$, g_N μετρήσιμη $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-2\pi i \xi x} f(x) \chi_{[-N,N]}(x)}\, d\lambda(x)$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $g_N(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} e^{-2\pi i \xi x} \cdot f(x)$. $g_N(x)$.

• $\forall N \in \mathbb{N}$, $|g_N(x)| \leq |e^{2\pi i \xi x} \cdot f(x)| = |f(x)|$, ανεξ. του N.

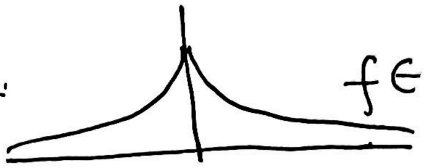
με $\int |f(x)|\, d\lambda(x) < +\infty$

Άρα από ΘΚΣ: $\int g_N \, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) \, d\lambda(x) = \hat{f}(\xi)$.

π.χ.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ f(x)=e^{-|x|} \ (\in L^1(\mathbb{R}))$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}, \ \forall \xi\in\mathbb{R}$$



$f\in L^1(\mathbb{R})$.

<u>Λύση</u>

Ξέρουμε $\hat{f}(\xi) = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i\xi x}\cdot e^{-|x|} \, d\lambda(x) =$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^N \underbrace{e^{-2\pi i \xi x} e^{-x}}_{= e^{-(2\pi i\xi+1)x}} d\lambda(x) + \int_{-N}^{0} \underbrace{e^{-2\pi i \xi x} e^{x}}_{= e^{(1-2\pi i\xi)x}} d\lambda(x)\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{-(1+2\pi i\xi)}\left[e^{-(1+2\pi i\xi)x}\right]_0^N + \frac{1}{1-2\pi i\xi}\left[e^{(1-2\pi i\xi)x}\right]_{-N}^{0}\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+2\pi i\xi}\Big(\underbrace{e^{-(1+2\pi i\xi)N}}_{\downarrow \, 0} - 1\Big) + \frac{1}{1-2\pi i\xi}\Big(1 - \underbrace{e^{-(1-2\pi i\xi)N}}_{\downarrow \, 0}\Big)\right]$$

$$= \frac{1}{1+2\pi i\xi} + \frac{1}{1-2\pi i\xi} = \frac{1+\cancel{2\pi i\xi}+1-\cancel{2\pi i\xi}}{1-4\pi^2\xi^2} = \frac{2}{1-4\pi^2\xi^2}.$$

Μάθημα 18 - 16/04/2024

Βασικές ιδιότητες (μετασχ. Fourier)

① i) $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$

ii) όταν η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι της μορφής:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

τότε $\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdot \ldots \cdot \hat{f}_n(\xi_2)$

Απόδειξη

(ii) $$\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int e^{-2\pi i \langle (\xi_1, \dots, \xi), (x_1, \dots, x_n) \rangle} \cdot f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \, d\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=\!=} \left[\int e^{-2\pi i \xi_1 x_1} f_1(x_1) \, d\lambda(x_1) \right] \cdot \ldots \cdot \left[\int e^{-2\pi i \xi_n x_n} f_n(x_n) \, d\lambda(x_n) \right]$$

$$= \hat{f}_1(\xi_1) \cdot \ldots \cdot \hat{f}_n(\xi_n).$$

Πρόταση: έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε ο $\hat{f}$ είναι συνεχής

και: $|\hat{f}(\xi)| \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$

(Άρα: ο $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής)

Απόδειξη: • Συνέχεια: έστω $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, και $\xi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \xi_0$

θδο $\hat{f}(\xi_n) \longrightarrow \hat{f}(\xi_0)$.

$$\left(|\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi_0)| = \left| \int e^{-2\pi i \langle \xi_n, x \rangle} f(x) \, d\lambda(x) \right. \right)$$

$$\hat{f}(\xi_n) = \int e^{-2\pi i \langle \xi_n, x \rangle} f(x)\, d\lambda(x)$$

$$\hat{f}(\xi_0) = \int e^{-2\pi i \langle \xi_0, x \rangle} f(x)\, d\lambda(x).$$

Η $\phi_n = e^{-2\pi i \langle \xi_n, \cdot \rangle} \cdot f$ ικανοποιεί:

- $\phi_n(x) \longrightarrow e^{-2\pi i \langle \xi_0, x \rangle} \cdot f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}\quad |\phi_n(x)| = \left| e^{-2\pi i \langle \xi_n, x \rangle} f(x) \right| \leq |f(x)|$

(και $\int |f(x)|\, d\lambda(x) < +\infty$)

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Άρα από ΘΚΣ:

$$\int \phi_n(x)\, d\lambda(x) \longrightarrow \int e^{-2\pi i \langle \xi_0, x \rangle} f(x)\, d\lambda(x) = \hat{f}(\xi_0).$$

- <u>R–L</u>: <u>Βήμα 1</u>: Ισχύει για χ_I, I διάστημα στον $\mathbb{R}^n$.

Για $n=1$: έστω $I = [\alpha, b]$ στο $\mathbb{R}$

(α, b)

Θέλω $\left| \hat{\chi}_I(\xi) \right| \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$

$$\hat{\chi}_I(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi \cdot x} \chi_I(x)\, d\lambda(x) = \int_\alpha^b e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, d\lambda(x) =$$

$$\overset{\xi \neq 0}{=} \frac{1}{-2\pi i \xi} \left[e^{-2\pi i \xi x} \right]_\alpha^b = \frac{1}{2\pi i \xi} \underbrace{\left(e^{-2\pi i \xi b} - e^{-2\pi i \xi a} \right)}_{\leq 2}$$

Άρα $|\hat{\chi}_I(\xi)| \leq \frac{1}{\cancel{2}\pi|\xi|} \cdot \cancel{2} = \frac{1}{\pi|\xi|} \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$

• $\forall n \geq 2$: έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}^n$

$I = \prod_{i=1}^{n} I_i$, κάθε I_i διάστημα στο $\mathbb{R}$.

$\left(\chi_I = \prod_{i=1}^{n} \chi_{I_i}, \ \chi_I(x_1, \dots, x_n) = \chi_{I_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{I_n}(x_n)\right)$

$$\left|\hat{\chi}_I(\xi_1, \dots, \xi_n)\right| = \left|\hat{\chi}_{I_1}(\xi_1)\right| \cdot \dots \cdot \left|\hat{\chi}_{I_n}(\xi_n)\right| \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

$|\xi_i| \to +\infty$ για κάποιο i

• <u>Βήμα 2</u>: ισχύει $\forall \ell: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ κλιμακωτή, αφού $\ell = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_I$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{C}$. I_i = διαστήματα

$$\Rightarrow \left|\hat{\ell}(\xi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} c_i \hat{\chi}_I(\xi)\right| \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0.$$

• <u>Βήμα 3</u> έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$.

$\exists\ \ell \in Step(\mathbb{R}^n)$: $\|\ell - f\|_1 < \varepsilon$. Τότε $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ $|\hat{f}(\xi) - \hat{\ell}(\xi)| =$

$$= \left|\int e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} (f(x) - \ell(x)) \, d\lambda(x)\right| \leq$$

$$\leq \int |f(x) - \ell(x)| \, d\lambda(x) = \|f - \ell\|_1 < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ ξέρουμε: $|\hat{f}(\xi)| \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M>0 : |\hat{\ell}(\xi)| < \varepsilon, \forall |\xi| > M$

$\Rightarrow \forall |\xi| > M, \ |\hat{f}(\xi)| \leq \underbrace{|\hat{f}(\xi) - \hat{\ell}(\xi)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|\hat{\ell}(\xi)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$

⚠ $\wedge : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$

<u>Πρόταση</u>: έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε:
$\tau_\alpha f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $\tau_\alpha f = f(x+\alpha)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

και $m_\alpha f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$m_\alpha f(x) = e^{+2\pi i \overset{\text{σταθ.}}{\langle \alpha, x\rangle}} \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(1) $\widehat{\tau_\alpha f}(\xi) = (m_\alpha \hat{f})(\xi)$

δηλ. $\widehat{f(\cdot + \alpha)}(\xi) = e^{-2\pi i \langle \alpha, \xi\rangle} \cdot \hat{f}(\xi)$

(2) $\widehat{m_\alpha f}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha) = (\tau_{-\alpha}\hat{f})(\xi)$, δηλ. $\widehat{\left(e^{2\pi i \langle \alpha, \cdot\rangle} f\right)}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$

⚠ $\widehat{\tau_\alpha f} = m_\alpha \hat{f}$, $\widehat{m_\alpha f} = \tau_{-\alpha}\hat{f}$.

(3) $\forall \delta > 0$: η $f_\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, με $f_\delta(x) = f(\delta x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

τότε $\hat{f_\delta}(\xi) = \dfrac{1}{\delta^n} \hat{f}\left(\dfrac{\xi}{\delta}\right)$

Απόδειξη:

(3) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{f_\delta}(\xi) = \int e^{-2\pi i \langle \xi, x\rangle} f_\delta(x)\, d\lambda(x) =$

$$= \int e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(\underbrace{\delta x}_{\overset{\shortparallel}{y}})\, d\lambda(x) \xrightarrow[\substack{y=\delta x \\ x = \frac{y}{\delta}}]{d\lambda(y) = \delta^n d\lambda(x)}$$

$$= \int e^{-2\pi i \underbrace{\langle \xi, \frac{y}{\delta} \rangle}_{\langle \frac{\xi}{\delta}, y \rangle}} f(y) \frac{1}{\delta^n}\, d\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{\delta^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$$

Οπτικοποίηση του (3)

⚠ έστω $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, με $\int g\, d\lambda$ να υπάρχει. Τότε $\forall \delta >$

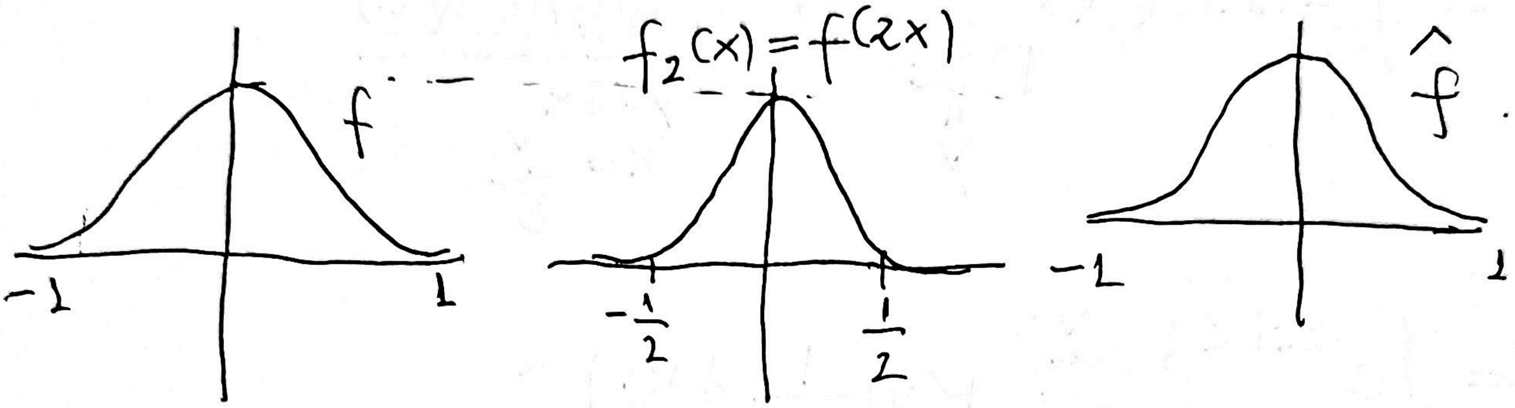
$$\int \frac{1}{\delta^n} g\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) d\lambda = \int g\, d\lambda$$

$\forall \delta > 0$, $\displaystyle \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n} g(\underbrace{\frac{x}{\delta}}_{\overset{\shortparallel}{y}})\, d\lambda(x) \xrightarrow[d\lambda(y) = \frac{1}{\delta^n} d\lambda(x)]{\substack{\frac{x}{\delta} = y \\ x = y \cdot \delta}}$

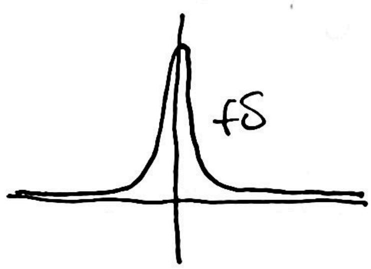
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, d\lambda(y) = \int g\, d\lambda.$$

Άρα $\forall \delta>0$, $\hat{f}_\delta$ έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα

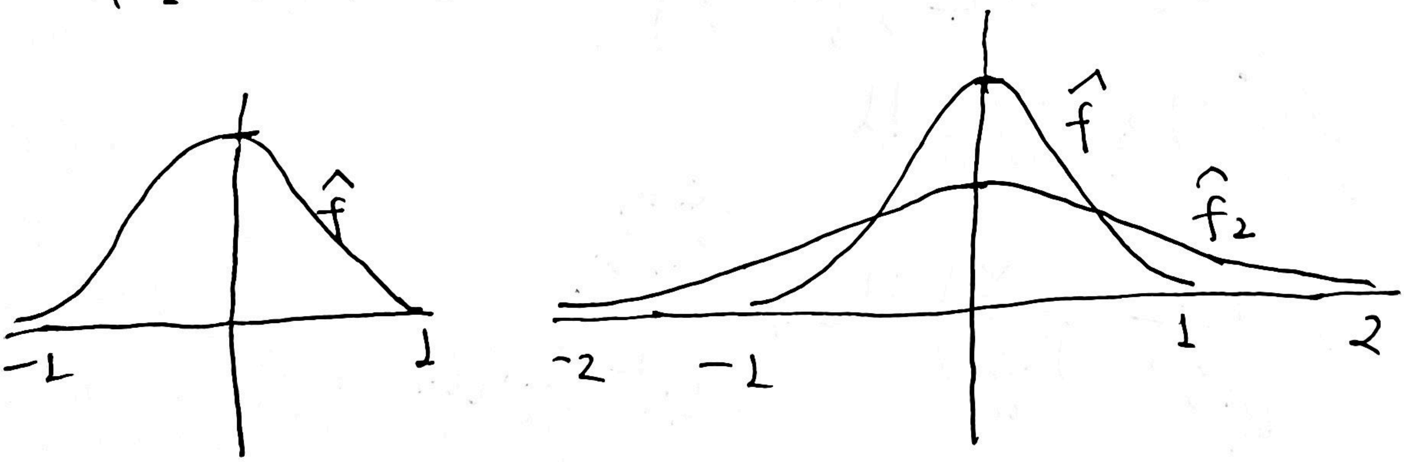
$\delta=2$:



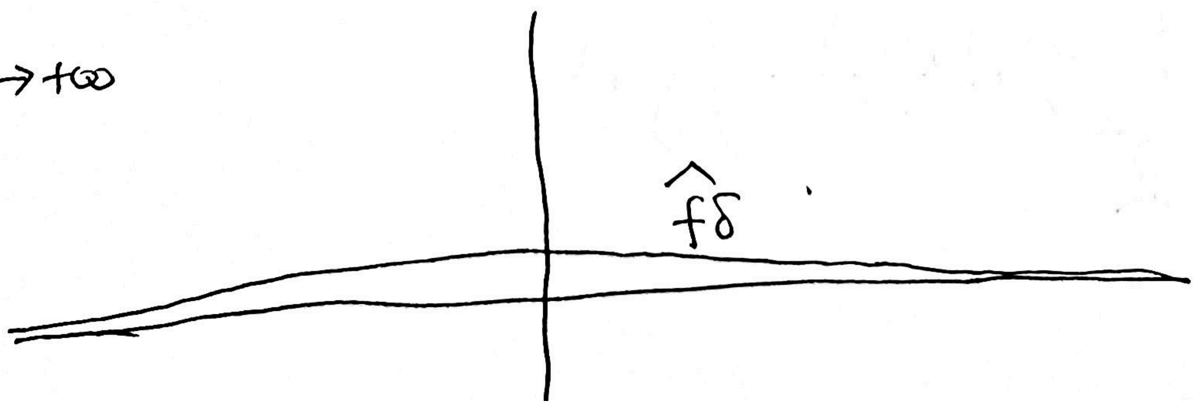
καθώς $\delta \to +\infty$



για $\delta=2$: $\hat{f_2}(\xi)=\frac{1}{2}\hat{f}\left(\frac{\xi}{2}\right)$
$n=1$

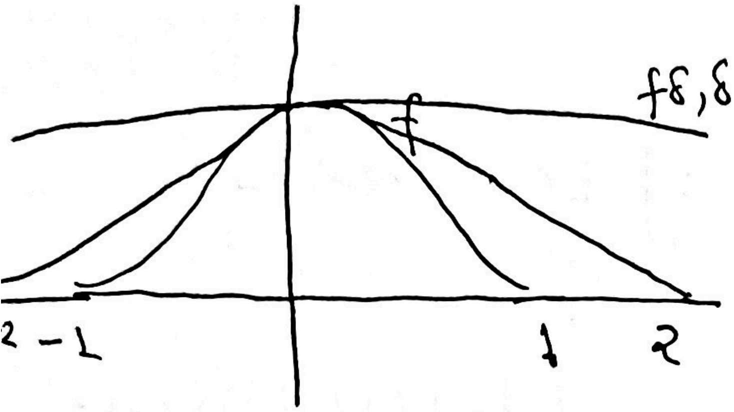


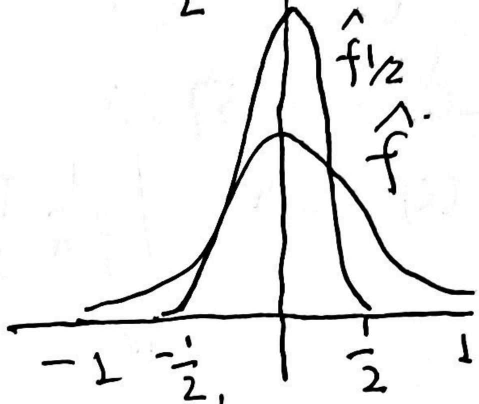
καθώς $\delta \to +\infty$

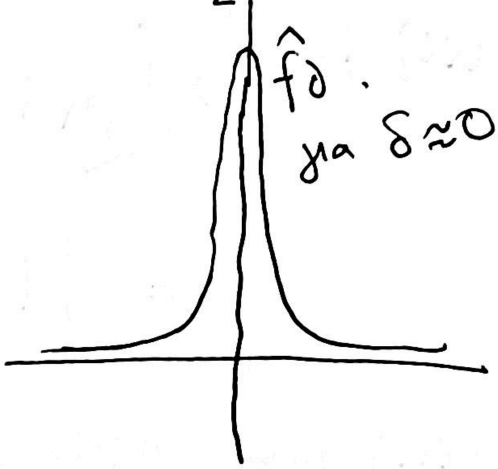


Άρα καθώς $\delta \nearrow$, η f_δ επικεντρώνεται, ενώ η $\hat f_\delta$ διαχέεται (αρχή αβεβαιότητας).

καθώς $\delta \searrow 0$: $\delta=\frac{1}{2}$, $f_{\frac{1}{2}}(x)=f(\frac{x}{2})$, $\hat f_{\frac{1}{2}}(\xi)=2\cdot \hat f(2\xi)$.







άρα καθώς $\delta \searrow 0$:

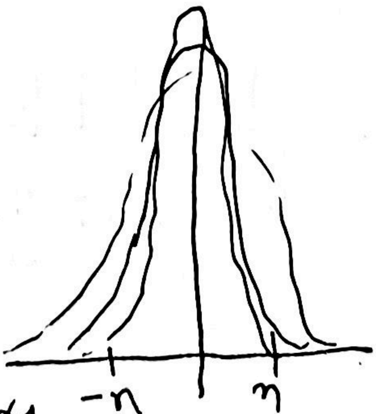
Η f_δ "διαχέεται" και οι $(\hat f_\delta)_{\delta\searrow}$ μοιάζουν με καλούς πυρήνες.

Ορ: έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια συναρτήσεων $K_\delta:\mathbb{R}^n\longrightarrow \mathbb{C}$, με:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta \, d\lambda = 1, \ \forall \delta>0$

(ii) $\exists B>0: \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta| d\lambda \leq B, \ \forall \delta>0$

(iii) $\forall \eta>0: \int_{|y|\geq \eta} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.



τότε οι $(K_\delta)_{\delta>0}$ λέμε ότι είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

<u>Πρόταση</u>: έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = 1$.
Τότε η οικογένεια: $\left(\frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)\right)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων:

<u>Απόδειξη</u>:

(i) $\forall \delta>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{x}{\delta}\right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda(x) = 1$.

(ii) $\forall \delta>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{x}{\delta}\right)\right| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\delta^n} |f|\left(\frac{x}{\delta}\right) d\lambda(x) =$

$= \int |f|(x)\, d\lambda(x) = \|f\|_1 < +\infty$.

(iii) έστω $\eta>0$. $\int_{|y|\geq \eta} \left|\frac{1}{\delta^n} f\left(\frac{y}{\delta}\right)\right| d\lambda(y) \xrightarrow[?]{\delta\to 0} 0$.

$$\frac{1}{\delta^n}\int_{|y|\geq\eta} \left|f\left(\frac{y}{\delta}\right)\right| d\lambda(y) \underset{d\lambda(x)=\frac{1}{\delta^n}d\lambda(y)}{\overset{x=\frac{y}{\delta}}{=\!=\!=\!=}}$$

$|\delta x| \geq \eta \iff |x| \geq \frac{\eta}{\delta}$

$$= \frac{1}{\delta^n}\int_{|x|\geq\frac{\eta}{\delta}} |f(x)|\cdot\delta^n\, d\lambda(x) = \underbrace{\int_{|x|\geq\frac{\eta}{\delta}} |f(x)|\, d\lambda(x)}_{\xrightarrow{\delta\to 0}\ 0}.$$

Πόρισμα: έστω $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, με $\int_{\mathbb{R}^n}\hat f\, d\lambda = 1$. Τότε: ορίζοντας $f_\delta(x)=f(\delta x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

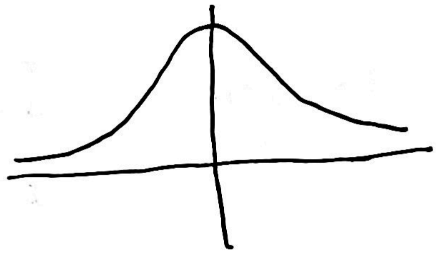
έχουμε: η $(\hat{f}_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

Απόδειξη: $\hat{f}_\delta(\xi)=\frac{1}{\delta^n}\hat f\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat f = 1$$

Εφαρμογή για Γκαουσιανές:

Ορίζουμε: $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=e^{-\pi x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.



ξέρουμε: $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx=1$

δηλ $\int G\, d\lambda=1$.

Πρόταση: $\boxed{\hat G = G}$

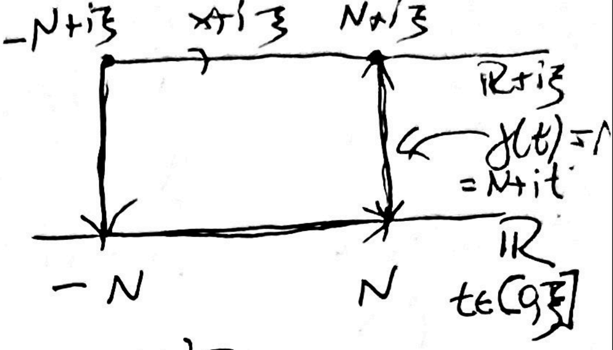
Απόδειξη: έστω $\xi\in\mathbb{R}$. Θέλω $\boxed{\hat G(\xi)=e^{-\pi\xi^2}}$.

$$\hat G(\xi)=\int e^{-2\pi i\xi x}e^{-\pi x^2}dx \overset{\text{Συμπλ.}}{=} \int e^{-\pi(x^2+2i\xi x+(i\xi)^2)}\cdot\underbrace{e^{\pi(i\xi)^2}}_{e^{-\pi\xi^2}}dx$$

$$= e^{-\pi\xi^2}\cdot\underbrace{\int e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx}_{= I}$$

$$I = \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

$$= \underbrace{\lim_{N \to +\infty} \int_{-N+i\xi}^{N+i\xi} e^{-\pi z^2} dz}_{= I_N}$$



$$I_N = \underbrace{\int_{-N+i\xi}^{-N} e^{-\pi z^2} dz}_{I_{N,1}} + \int_{-N}^{N} e^{-\pi x^2} dx + \underbrace{\int_{N}^{N+i\xi} e^{-\pi z^2} dz}_{I_{N,2}}$$

$$\int_{-N}^{N} e^{-\pi x^2} dx \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1.$$

Θ·δο. $\quad \begin{matrix} I_{N,1} \\ I_{N,2} \end{matrix} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$|I_{N,2}| = \left| \int_0^{\xi} e^{-\pi(N+it)^2} \cdot i \, dt \right| =$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$\leq |\xi| \cdot \sup_{0 \leq t \leq \xi} \Big| \underbrace{e^{-\pi(N+it)^2}}_{e^{-\pi N^2} \cdot |e^{-2\pi N i t}| \cdot e^{\pi t^2}} \Big|$$

$$e^{-\pi N^2} \cdot \underbrace{|e^{-2\pi N i t}|}_{=1} \cdot e^{\pi t^2} = e^{-\pi N^2} \cdot e^{\pi \xi^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$