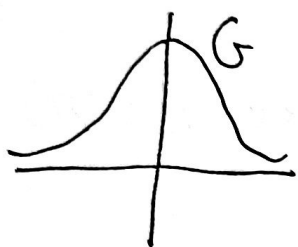


Γκαουσιανές

$$G(x) = e^{-\pi x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$



$$\int G = 1 \quad \text{και} \quad \hat{G} = G$$

Αρα, ορίζοντας: $G_\delta(x) = G(\delta x) = e^{-\pi(\delta x)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{τότε} \quad (\hat{G}_\delta)_{\delta>0} = \left(\frac{1}{\delta} \cdot \hat{G}\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) \right)_{\delta>0}$$

είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

$$\cdot \quad \delta=1: \hat{G}_1 = \hat{G} = G, \quad \int \hat{G}_1 = 1.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, ορίσω: $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = e^{-\pi |x|^2} = e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_n^2)}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, \dots, x_n).$$
$$= e^{-\pi x_1^2} \cdot \dots \cdot e^{-\pi x_n^2}$$

$$\text{τότε:} \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(x) d\lambda(x) = \int e^{-\pi x_1^2} dx_1^2 \cdot \dots \cdot \int e^{-\pi x_n^2} dx_n = 1.$$

$$\hat{G}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \hat{G}(\xi_1) \cdot \dots \cdot \hat{G}(\xi_n) =$$
$$\underset{\xi}{=} \hat{G}(\xi) \Rightarrow \hat{G} = G$$

Αρα ορίζοντας $G_\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, G_\delta(x) = G(\delta x).$

$$= e^{-\pi |\delta x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

έχω: $\int \hat{G} = 1$, άρα η $(\hat{G}\delta)_{\delta>0} = \left(\frac{1}{\delta^n} \cdot \hat{G}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)_{\delta>0}$

είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

Ορ: Μια $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται Γκαουσιανή αν $\exists c > 0$
 ω $f(x) = e^{-c \cdot |x|^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, έχουμε:

$$\int f(y) \cdot \hat{g}(y) d\lambda(y) = \int \hat{f}(y) \cdot g(y) d\lambda(y).$$

Απόδειξη:

$$\int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \cdot \hat{g}(y) d\lambda(y) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \cdot \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} g(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) =$$

$$= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} \cdot f(y) \cdot g(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) =$$

Fubini

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} f(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) =$$

$$= \int_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \cdot \hat{f}(x) d\lambda(x).$$

Στόχος: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε:

$$f(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\lambda(\xi) = \hat{\hat{f}}(-x)$$

" $e^{-2\pi i \langle -x, \xi \rangle}$ για λ -σχεδόν κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$

Ιδέα: $\forall \delta > 0, g = G_\delta: \int f(y) \hat{G}_\delta(y) d\lambda(y) =$

$$= \int \hat{f}(y) \cdot G_\delta(y) d\lambda(y) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int \hat{f}(y) d\lambda(y).$$

$$G_\delta(x) = e^{-\pi |x|^2 \delta} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{\delta \rightarrow 0} 1.$$

"μέρος προς" της f
κοντά στο 0

παράγεται: $\int f(y) \hat{G}_\delta(-y) d\lambda(y) = f * \hat{G}_\delta(0) \xrightarrow[\downarrow]{\delta \rightarrow 0} f(0)$

ω f συνεχής
στο 0

Συνελίξεις στο $\mathbb{R}^n$:

ορ: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε:

$$f * g(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) d\lambda(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

η συνελίξη
ω f, g
στο x

Πρόταση: Η $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται καλά
για λ -σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Μάλιστα, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, και $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Ιδιότητες: $\forall f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε:

(i) $f * g = g * f$

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(iv) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

(v) $\int f * g \, d\lambda = \int f \, d\lambda \cdot \int g \, d\lambda$

(vi) $\forall p \geq 1, \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(vii) $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp} f + \text{supp} g$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, d\lambda(y).$$

Άρα, για να είναι το $f * g(x) \neq 0$, αναπαίρεται να υπάρχουν είναι να $\exists y \in \mathbb{R}^n$ ώστε:

$$f(x-y)g(y) \neq 0,$$

δηλ. ώστε $x-y \in \text{supp} f$ και $y \in \text{supp} g$.

Άρα, κάθε x με $f * g(x) \neq 0$ γράφεται ως

άθροισμα ενός στοιχείου του $\text{supp} f$ με ένα στοιχείο του $\text{supp} g$.

Τα (i) - (vi) αποδεικνύονται όπως για σειρές Fourier.

Πρόταση: Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(i)} \int K_\delta = 1, \forall \delta > 0 \\ \text{(ii)} \exists A > 0: \int |K_\delta| \leq A, \forall \delta > 0 \\ \text{(iii)} \forall \eta > 0: \int_{|y| > \eta} |K_\delta(y)| dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{array} \right)$$

Τότε: (α) $\forall g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ γραμμική και ομ. συνεχής
έχουμε: $g * K_\delta \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{\|\cdot\|_\infty} g$ (δηλ. $\|g * K_\delta - g\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$)

π.χ. αν g συνεχής με συμπαγή φέρει
($g \in C_c(\mathbb{R}^n)$)

(β) Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε $\|f * K_\delta - f\|_1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

(γ) Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 < p < +\infty$:

$$\|f * K_\delta - f\|_p \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Απόδειξη (α) όπως το αντίστοιχο έστω Π .

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$. Θέλουμε: για μικρά $\delta > 0$

$$\|f * K_\delta - f\|_1 < \varepsilon$$

$$\exists g \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ ώστε } \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

$$\text{τότε } \|f * K_\delta - f\|_1 \leq \|f * K_\delta - g * K_\delta\|_1 + \|g * K_\delta - g\|_1 + \underbrace{\|g - f\|_1}_{< \varepsilon}$$

$$\bullet \|f * K_\delta - g * K_\delta\|_1 = \|K_\delta * (f - g)\|_1 \leq \underbrace{\|K_\delta\|_1}_{\leq A} \cdot \underbrace{\|f - g\|_1}_{< \varepsilon} \leq A\varepsilon$$

$$\bullet \|g * K_\delta - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g * K_\delta - g| d\lambda = \leq A$$

$$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \exists M > 0: g(x) = 0 \quad \forall |x| > M.$$

$$= \int_{|x| \leq M+1} |g * K_\delta(x) - g(x)| d\lambda(x) + \int_{|x| > M+1} |g * K_\delta(x)| d\lambda(x) \quad \downarrow g=0$$

$$\leq \|g * K_\delta - g\|_\infty$$

$$\leq (M+1)^n \cdot \|g * K_\delta - g\|_\infty \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 + \int_{|x| > M+1} \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} K_\delta(y) g(x-y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$\downarrow \delta \rightarrow 0$

$|x| > M+1 \Rightarrow |y| \geq 1$ car $|x-y| > M \Rightarrow g(x-y) = 0$ car $|y| < 1$ et $|x-y| > M \Rightarrow g(x-y) = 0$

$$= \int_{|x| > M+1} \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} [K_\delta \cdot \chi_{B(0,1)^c}](y) \cdot g(x-y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{|x| > M+1} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} (|K_\delta| \chi_{B(0,1)^c})(y) \cdot |g(x-y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

$$= \int_{|x| > M+1} (|K_\delta| \chi_{B(0,1)^c}) * |g|(x) d\lambda(x)$$

$$= \int_{|x| > M+1} |K_\delta| \chi_{B(0,1)^c} * |g| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{x \in \mathbb{R}^n} (|K_\delta| \chi_{B(0,1)^c}) * |g| d\lambda = \int |K_\delta| \chi_{B(0,1)^c} \cdot \int |g| d\lambda$$

$\|g\|_1 < +\infty$

$$= \int_{\substack{B(0, \delta)^c \\ |y| \geq 1}} |K_\delta(y)| d\lambda(y) \cdot \|g\|_1 < \varepsilon, \text{ για } \delta \text{ μικρό.}$$

$\downarrow \delta \rightarrow 0$
 0

(γ) όμοια.

Ορ: Μια οικογ. $(K_\delta)_{\delta > 0}$ συναρτησεων:

$K_\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \forall \delta > 0$, λεγεται προσεγγιση της
μοναδας αν:

(i) $\int K_\delta d\lambda = 1, \forall \delta > 0$

(ii) $\exists A > 0: |K_\delta| \leq \frac{A}{\delta}, \forall \delta > 0$

(iii) $\exists B > 0: |K_\delta(y)| \leq \frac{B \cdot \delta}{y^2}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Για $K_\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta d\lambda = 1$

(ii) $\exists A > 0: |K_\delta| \leq \frac{A}{\delta^n}, \forall \delta > 0.$

(iii) $\exists B > 0: |K_\delta(y)| \leq \frac{B \cdot \delta}{|y|^{n+1}}, \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Πρόταση: Κάθε $(K\delta)\delta > 0$ προσέγγιση της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

Απόδειξη: (i) $\int K\delta d\lambda = 1 \checkmark$

(ii) $\int |K\delta| d\lambda \leq M, \forall \delta > 0$:

$$\int_{y \in \mathbb{R}^n} |K\delta(y)| d\lambda(y) = \int_{|y| \leq \delta} \underbrace{|K\delta(y)|}_{\leq \frac{A}{\delta^n}} d\lambda(y) + \int_{|y| \geq \delta} \underbrace{|K\delta(y)|}_{\leq \frac{B \cdot \delta}{|y|^{n+1}}} d\lambda(y)$$

$$\leq \frac{A}{\delta^n} \cdot C_n \cdot \delta^n + B\delta \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy$$

για $n=1$: $B \cdot \delta \cdot \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{y^2} dx = 2B\delta \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy =$

$$= 2B\delta \left[-\frac{1}{y} \right]_{\delta}^{+\infty} \leq 2B < +\infty$$

Γενικό n : $\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx \xrightarrow[r \in [0, +\infty), w \in S^{n-1}]{x=rw} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{w \in S^{n-1}} f(rw) \cdot r^{n-1} dw dr$

$$\Rightarrow \int_{|y| \geq \delta} \frac{1}{|y|^{n+1}} dy \xrightarrow[y=rw]{y=rw} \int_{r=\delta}^{+\infty} \int_{w \in S^{n-1}} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot r^{n-1} dw dr$$

$$= \int_{r=\delta}^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \int_{w \in S^{n-1}} 1 dw = C_n \cdot \frac{1}{\delta}$$