

Άσκηση (θεωρία):  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: G(x) = e^{-\pi|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

και  $G_\delta(x) = e^{-\pi|\delta x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Τότε:  $(\hat{G}_\delta)_{\delta>0} = \left( \frac{1}{\delta^n} G\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) \right)_{\delta>0}$  είναι προσεγγίση της μονάδας.

Λύση:

(i)  $\int \hat{G}_\delta d\lambda = 1 \quad \checkmark$

(ii)  $\forall \delta > 0, |\hat{G}_\delta(x)| = \left| \frac{1}{\delta^n} G\left(\frac{x}{\delta}\right) \right| \leq \frac{1}{\delta^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n (A=1).$

(iii)  $\hat{G}_\delta(y) = \frac{1}{\delta^n} \cdot e^{-\pi|\frac{y}{\delta}|^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \dots$

$\Rightarrow \forall x > 0: e^x \geq \frac{x^k}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall x > 0: e^{-x} \leq \frac{k!}{x^k}, \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, e^{-\pi|\frac{y}{\delta}|^2} \leq \frac{k!}{\left(\pi \cdot \frac{|y|^2}{\delta^2}\right)^k} = \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\delta^{2k}}{|y|^{2k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$

άρα  $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\hat{G}_\delta(y)| \leq \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\delta^{2k}}{\delta^n} \cdot \frac{1}{|y|^{2k}}, \forall k \in \mathbb{N}.$

για  $k=n$ :  $|\hat{G}_\delta(y)| \leq \underbrace{\left(\frac{n!}{\pi^n}\right)}_{B_n} \frac{\delta^n}{|y|^{2n}}, \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$

• Για  $|y| \geq \delta$ :  $|\hat{G}_\delta(y)| \leq B_n \cdot \frac{\delta^n}{|y|^{n+1} \cdot \delta^{n+1}} = B_n \cdot \frac{\delta}{|y|^{n+1}}$ .

• Για  $|y| < \delta$ : (ii)  $\Rightarrow |\hat{G}_\delta| \leq \frac{A}{\delta^n} = A \frac{\delta}{\delta^{n+1}} \leq \frac{\delta}{|y|^{n+1}}$ .

Πρόταση: Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\int |f| d\lambda < +\infty$ .

Έστω  $(K_\delta)_{\delta>0}$  προσέγγιση της μονάδας. Τότε:

$$K_\delta * f \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f \text{ κ.σ. } \lambda\text{-}\sigma.\pi.$$

Συγκεκριμένα  $K_\delta * f(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(x_0)$ ,  $\forall x_0$  σημείο Lebesgue της  $f$ .

Θεωρία:

Θεώρημα παραγωγής του Lebesgue:

Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\int |f| < +\infty$ .

Τότε για  $\lambda$ -σ.κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  έχουμε:

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x) d\lambda(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(x_0) = \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x_0) d\lambda(x_0). \text{ Μάλιστα:}$$

$$\left( \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)| d\lambda(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \quad (*) \right),$$

για  $\lambda$ -σ.κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (ισχυρότερο).

Κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  όπου ισχύει η (\*) λεγεται σημείο

Lebesgue της  $f$ .

2.6:  $\text{Leb}(f) := \{ \text{σημεία Lebesgue της } f \}$ .

Το θεωρημα λέει:  $\lambda(\mathbb{R}^n \setminus \text{Leb}(f)) = 0$

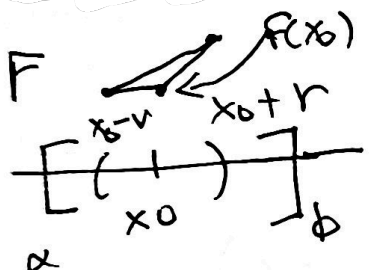
ΕΠΙΘΕΤΟ ΣΥΝΕΠΕΡΑΖΕΤΑΙ:

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x) d\lambda(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(x_0), \forall x_0 \in \text{Leb}(f).$$

→ Γιατί "παράγωγής"; Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε  $[a, b]$ . Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Το να έχουμε ότι  $x_0 \in \text{Leb}(f)$  ηλεκτικά ισοδυναμεί με  $F'(x_0) = f(x_0)$ ,

όπου  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t) dt$ :



$$\frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x) dx = \frac{1}{2r} [F]_{x_0-r}^{x_0+r} =$$

$F'(x)$

$$= \frac{1}{2r} (F(x_0+r) - F(x_0-r)) =$$

$$= \frac{1}{2r} (F(x_0+r) - F(x_0)) + \frac{1}{2r} (F(x_0) - F(x_0-r)) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{F(x_0+r) - F(x_0)}{r} + \frac{F(x_0) - F(x_0-r)}{r} \right]$$

αφ' η  $F'(x_0)$

$\downarrow r \rightarrow 0^+$

$F'(x_0)$

αφ' η  $F'(x_0)$

$\downarrow (-r \rightarrow 0^-)$

$F'(x_0)$

(και εν τέλει,  $x_0 \in \text{Leb}(f) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(x_0+r) - f(x_0-r)}{2r} = f(x_0).$ )

→ ένα είδος "παράγωγο" της  $f$

Άσκηση: Αν  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής, τότε  $\text{Leb}(g) = \mathbb{R}^n$ .

Λύση: έστω  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \cdot \int_{B(x_0, r)} |g(x) - g(x_0)| d\lambda(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

έστω  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0$  : αν  $\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in B(x_0, \delta)}$  τότε  $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ .

$$\text{Άρα } \forall 0 < r < \delta : \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |g(x) - g(x_0)| d\lambda(x) < \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} \varepsilon = \varepsilon$$

Παρατήρηση: έστω  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . έστω  $x_0 \in \text{Leb}(f)$ .

$$A(r) := \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \cdot \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)| d\lambda(x), \quad \forall r > 0$$

$$(\Delta_n) \quad A: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Η  $A$  είναι γραμμική, και  $\lim_{r \rightarrow 0} A(r) = 0$ . → αφού  $x_0 \in \text{Leb}(f)$

Απόδειξη: •  $A$  γραμμική:

•  $\lim_{r \rightarrow 0} A(r) = 0$ , άρα  $\exists \delta > 0$  : η  $A$  είναι γραμμική (π.χ.  $|A(r)| \leq 1$  στο  $(0, \delta)$ )

$$\text{• Για } r \gg \delta : A(r) \leq \frac{1}{C_n \cdot r^n} \left[ \underbrace{\int_{B(x_0, r)} |f(x)| d\lambda(x)}_{\leq \|f\|_1} + \int_{B(x_0, r)} |f(x_0)| d\lambda(x) \right]$$

$$\leq \frac{1}{c_n r^n} \|f\|_1 + \underbrace{\frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |f(x)| d\lambda(x)}_{|f(x_0)|}$$

$$\stackrel{r \geq \delta}{\leq} \underbrace{\frac{1}{c_n \delta^n} \|f\|_1 + |f(x_0)|}_{O(\delta^\alpha)}$$

Θεώρημα: Έστω  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  και  $(K_\delta)_{\delta > 0}$  προσεγγίση της μονάδας.

Τότε  $K_\delta * f(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in \text{Leb}(f)$ .  
(Οχεδόν όλος ο χώρος).

ήτοι  $K_\delta * f \rightarrow f$  κ.σ. π.σ.π

Απόδειξη: Έστω  $x_0 \in \text{Leb}(f)$

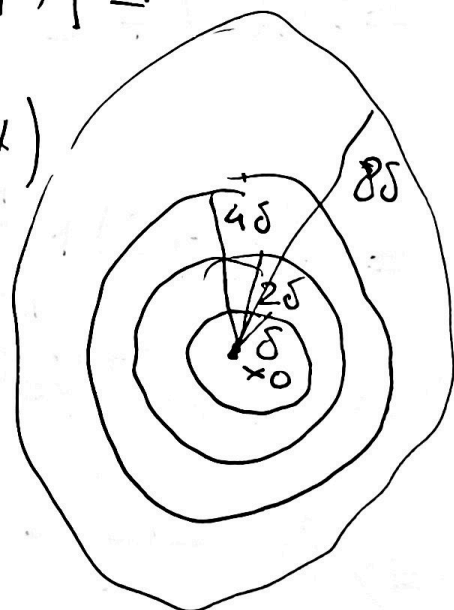
$$|K_\delta * f(x_0) - f(x_0)| = \left| \int f(x_0 - y) K_\delta(y) d\lambda(y) - \int f(x_0) K_\delta(y) d\lambda(y) \right|$$

$$= \left| \int [f(x_0 - y) - f(x_0)] K_\delta(y) d\lambda(y) \right| \leq$$

$$\leq \int |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot |K_\delta(y)| d\lambda(y) \stackrel{\leq \frac{C\delta}{|y|^{n+1}}}{\leq} \int \frac{C}{\delta^n} d\lambda(y)$$

$$\leq \int_{|y| \leq \delta} \dots + \int_{|y| \geq \delta} \dots \leq$$

$$\leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot \frac{C}{\delta^n} d\lambda(y) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2^k \delta \leq |y| < 2^{k+1} \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot \frac{C\delta}{|y|^{n+1}} d\lambda(y)$$



$$= c \cdot \frac{1}{\delta^n} \int_{y \in B(0, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| d\lambda(y) + c \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2^k \delta \leq |y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot \frac{1}{|y|^{n+1}}$$

$$\leq c' \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{y \in B(0, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| d\lambda(y) + c \cdot \delta \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2^k \delta \leq |y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \frac{1}{(2^k \delta)^{n+1}}$$

$$\leq c' \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{y \in B(0, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| d\lambda(y) + c \cdot \delta \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{|y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| \cdot \frac{1}{(2^k \delta)^{n+1}} d\lambda(y)$$

$$\leq c' \frac{1}{\lambda(B(x_0, r))} \int_{y \in B(0, \delta)} |f(x_0 - y) - f(x_0)| d\lambda(y) +$$

$$+ c \cdot \delta \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^k \delta} \frac{1}{(2^{k+1} \delta)^n} \int_{|y| \leq 2^{k+1} \delta} |f(x_0 - y) - f(x_0)| d\lambda(y)$$

$$= c' A(\delta) + c'' \delta \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^n}{2^k \delta} \cdot A(2^{k+1} \delta) =$$

$$\leq c_0 \left( A(\delta) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot A(2^{k+1} \delta) \right) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{?} 0$$

esw  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N \in \mathbb{N}$ :  $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2 \|A\|_\infty}$

$$\Rightarrow \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \cdot A(2^{k+1} \delta) \leq \left( \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \right) \cdot \|A\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Αρκεί: } A(\delta) + \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} (A(2^{k+1} \cdot \delta)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

$\delta \rightarrow 0 \downarrow$   $0$        $\delta \rightarrow 0 \downarrow$   $0$

Άρα για μικρά  $\delta$  δίνεται  $< \frac{\varepsilon}{2}$ .

άρα για μικρά  $\delta$ ,  $|K\delta * f(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

Θεώρημα: έστω  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , ώστε  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Τότε  $f(x) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi (= \hat{\hat{f}}(-x))$   
για  $\mu$ -α. κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  (βλ. ομ.  $\forall x \in \text{Leb}(f)$ ).

Απόδειξη:  $\int (\tau_x f)(y) \hat{G}_\delta(y) d\lambda(y) = \int (\tau_x f)(y) G_\delta(y) d\lambda(y)$

όπου  $G_\delta(x) = e^{-\pi |x|^2 / \delta^2}$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$  ( $\hat{G}_\delta = \left(\frac{1}{\delta^n} G\left(\frac{\cdot}{\delta}\right)\right)$   $\delta > 0$ ,  
προς. της μονάδας)

και:  $\tau_x f(y) = f(x+y), \forall y \in \mathbb{R}^n$

Άρα:  $\int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x+y) \cdot \hat{G}_\delta(y) d\lambda(y) = \int e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) G_\delta(y) d\lambda(y)$   
 $\parallel y = -u$   
 $f * \hat{G}_\delta(x)$

άρα  $\forall x \in \mathbb{R}^n$   $f * \hat{G}_\delta(x) = \int e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \hat{f}(y) G_\delta(y) d\lambda(y)$ .

καθώς  $\delta \rightarrow 0$ :

αριστερά:  $f * G_\delta(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(x), \forall x \in \text{Leb}(f)$

δεξιά:  $\delta \downarrow 0$   $G_\delta(x) = e^{-\pi \delta^2 |x|^2} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 1$



άρα:  $e^{2\pi i \langle x, \gamma \rangle} \hat{f}(\gamma) G_\delta(\gamma) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} e^{2\pi i \langle x, \gamma \rangle} \hat{f}(\gamma), \forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ .  
(κ.σ).

•  $\forall \delta > 0: |e^{2\pi i \langle x, \gamma \rangle} \hat{f}(\gamma) G_\delta(\gamma)| \leq |\hat{f}(\gamma)|$   
 $\forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ .

Απο. δεξί ηέλος  $\xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{\text{ΘΚΣ}} \int e^{2\pi i \langle x, \gamma \rangle} \hat{f}(\gamma) d\lambda(\gamma)$  όπου  $\int |\hat{f}(\gamma)| d\lambda(\gamma) < +\infty$   
(υπόθεση).