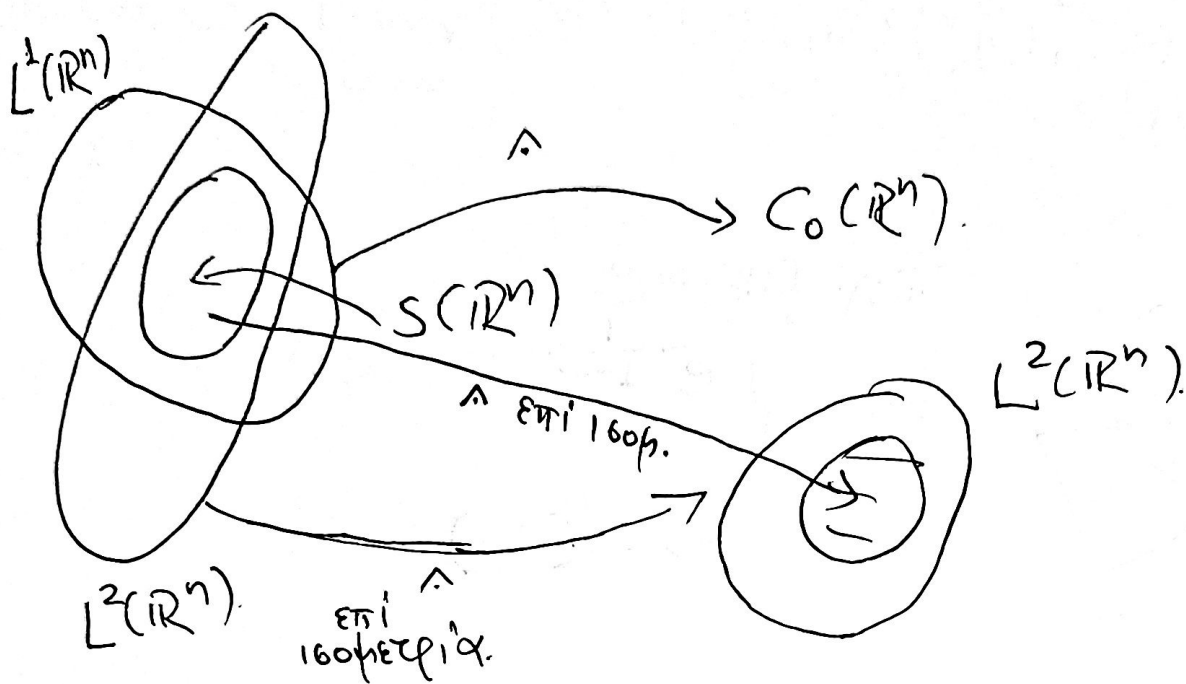


Μιθηνά 21-25/04/2024



Ορ: Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Λέμε ότι η f φθίνει με ταχύτητα τάξης k , αν $\exists C > 0$ ώστε $|f(x)| \leq \frac{C_k}{1+|x|^k}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ορ: Μια $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται συνάρτηση Schwartz αν

- (i) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f λεία)
- (ii) Η f και όλες οι περικές παράγωγοί της φθίνουν με ταχύτητα οποιαδήποτε τάξης.

→ για $k=0$, f φραγμένη.

→ για $k=1$: $(1+|x|)|f(x)|$ φραγμένη
 $\Leftrightarrow |f(x)|(1+|x|)$ φραγμένη
 $\hookrightarrow$ φραγτ.

→ για $k=2$: $|x|^2|f(x)|$ φραγμένη

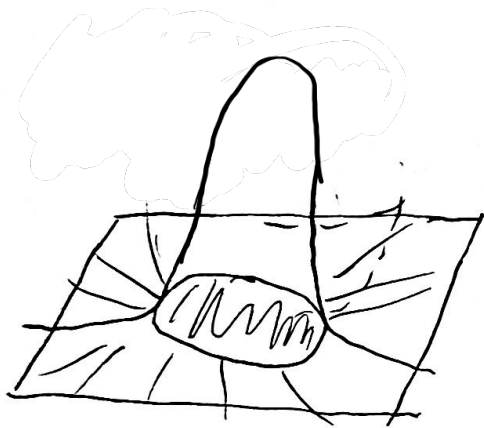
→ $|x|^k|f(x)|$ φραγμένη $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ισοδύναμα:
 $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
 $\forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
 $|x|^k |\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} f(x)|$
φραγμένη.

← Τι σημαίνει
 ότι μια f φθίνει
 με ταχύτητα
 κάθε τάξης.

Σημ: $S(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ Schwartz}\}$.

$\pi \cdot x$: ① $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (δηλ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και με συμπαγή υποσύνολο) είναι Schwartz.



$$\pi \cdot x: f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

② $\forall$ καυδιακή $f(x) = e^{-c|x|^2}$, $c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Schwartz. (αβκ.)

Πρόταση: Οι $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνοί σε $\forall$ καθε $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $\forall 1 \leq p < \infty$. Μαλιστα $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $\exists (g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ στον $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ώστε:

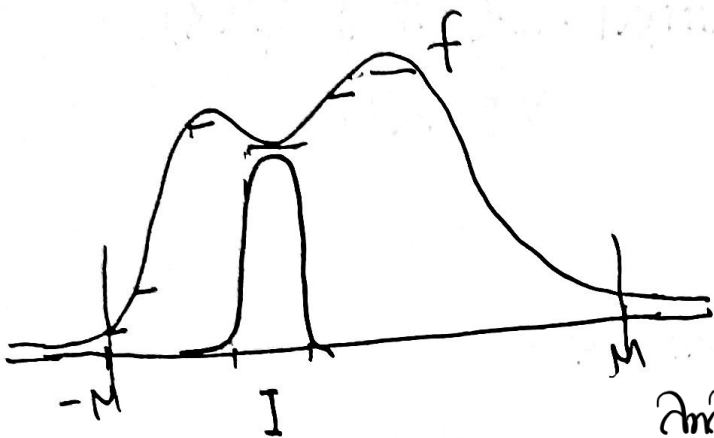
$$\|g_m - f\|_1 \rightarrow 0 \text{ και } \|g_m - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ καθώς } m \rightarrow \infty$$

Απόδειξη:

$\cdot n=1$: έστω $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$: And ok, $\|f - f \chi_{[-M, M]}\|_1 < \varepsilon$

$$\text{και } \|f - f \chi_{[-M, M]}\|_2 < \varepsilon$$

$$\exists h \in \text{Step}(\mathbb{R}) : \|f_M - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow \|f_M - h\|_1 \stackrel{CS}{\leq} (2M)^{\frac{1}{2}} \|f_M - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2M}} < \varepsilon$$



$\forall l$ ώστε $l = \sum c_1 \chi_1, \exists g_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
 και $\|g_1 - l\|_2 < \varepsilon$

$\|g_1 - l\|_1 < \varepsilon$. (Παρόμοια

με πριν, πρώτα προσεγγίζουμε κατεί-
 λματα στον L^2 , και με C-S προσεγγίζουμε
 και στον L^1).

$\# g = \sum c_1 g_1$ προσεγγίζει καλά την f ως προς $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$

Στόχος:

$$(S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \xrightarrow[\text{160 προσέγγιση}]{\text{ΕΠΙ}} (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$$

Ιδιότητες του $S(\mathbb{R}^n)$:

- $\forall f, g \in S(\mathbb{R}^n), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \eta \lambda f + \mu g \in S(\mathbb{R}^n)$
- Αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε $\partial_{x_i} f \in S(\mathbb{R}^n), \forall i = 1, \dots, n$
- $\Rightarrow$ Επαγωγικά κάθε περική παράγωγος της f είναι Schwartz.
- Αν $f \in S(\mathbb{R}),$ τότε $x \cdot f(x) \in S(\mathbb{R})$.
- Γενικότερα, αν $f \in S(\mathbb{R}^n),$ τότε $\forall i = 1, \dots, n$ η $x_i f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$
- $\Rightarrow p(x) \cdot f(x) \in S(\mathbb{R}^n), \forall$ πολυώνυμο $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

$\rightsquigarrow \forall f \in S(\mathbb{R}),$ έχουμε ότι

$$\hat{f}'(\xi) = (2\pi i \xi) \hat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}. \text{ Γενικότερα,}$$

$$\forall f \in S(\mathbb{R}^n), \forall (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n:$$

→ Άρα, (πολλαπλασιάζοντας) (Fourier καινοίας Schwartz)
 = 0 Fourier καινοίας Schwartz!

$$\partial_{x_1}^{m_1} \dots \partial_{x_n}^{m_n} f(y) (\xi) = (2\pi i \xi_1)^{m_1} \dots (2\pi i \xi_n)^{m_n} \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Από δευξή $(n=1, m=1)$ (με Fubini γενικεύεται στον $\mathbb{R}^n$):

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}'(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f'(x) dx =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N e^{-2\pi i \xi x} f'(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\left[e^{-2\pi i \xi x} f(x) \right]_{-N}^N \right) -$$

$$- \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx = 0 \leadsto f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(e^{-2\pi i N \xi} f(N) - e^{2\pi i N \xi} f(-N) \right)$$

$$+ 2\pi i \xi \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx \stackrel{\text{OKΣ}}{=} 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

② Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, και $g(x) = x f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε:

(χάνεται το πολλαπλασιάζοντας).

$$\hat{g}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot (\hat{f})'(\xi).$$

Γενικότερα: Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $g(x) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} f(x_1, \dots, x_n)$ $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$\hat{g}(\xi) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^{k_1 + \dots + k_n} \partial_{\xi_1}^{k_1} \dots \partial_{\xi_n}^{k_n} \hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

→ Άρα, ο $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, και κάθε παράγωγος του $\hat{f}$ είναι εκ νέου Fourier καινοίας Schwartz!

Απόδειξη $n=1$

$$\hat{g}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} \cdot \underbrace{x f(x)}_{g(x)} dx =$$

$$\stackrel{\text{OKS}}{=} \frac{1}{-2\pi i} \int \left(\frac{d}{d\xi} \right) (e^{-2\pi i \xi x}) \cdot f(x) dx = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} \left(\int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx \right)$$

" $\hat{f}(\xi)$.

$$= -\frac{1}{2\pi i} (\hat{f})'(\xi).$$

Πρόταση: Αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$ τότε $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$

Απόδειξη: $(n=1)$: Αν $f \in S(\mathbb{R})$ τότε $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{f}$ είναι γραμμ. $\rightarrow$ για κάθε ιδιότητα του Fourier μιας Schwartz.

Δείξαμε: Για $g_k(x) = x^k f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\hat{g}_k(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^k} (\hat{f})^{(k)}(\xi) \Rightarrow (\hat{f})^{(k)}(\xi) = \underbrace{(-2\pi i)^k \cdot g_k}_{\in S(\mathbb{R})}.$$

$\Rightarrow \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ και: $(\hat{f})^{(k)}$ γραμμ.

$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, θέλω: $\xi^m (\hat{f})^{(k)}(\xi)$ γραμμ.

Για $k=0$: $\xi^m \cdot \hat{f}(\xi) = \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)^m} f^{(m)}}_{\in S(\mathbb{R})}(\xi) \quad \left\{ \text{γραμμ.} \right\}$

Για $k \in \mathbb{N}$: $\xi^m \cdot (\hat{f})^{(k)}(\xi) = \xi^m \cdot (-2\pi i)^k g_k(\xi) =$
 $= \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)^m} \cdot (-2\pi i)^k \cdot g_k^{(m)}}_{\in S(\mathbb{R})}(\xi) \quad \left\{ \text{γραμμ.} \right\}$

Πρόταση: $\mathcal{O}^\wedge: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ είναι επί.

Απόδειξη: Έστω $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Ψάχνω $g \in S(\mathbb{R}^n)$: $f = \hat{g}$.

$$f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}^n), \hat{f} \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

f συνεχής: άρα: $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) \stackrel{?}{=} \hat{g}(x)$

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \int e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = \int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi$$

$$= \int e^{-2\pi i \langle x, u \rangle} \hat{f}(-u) du = \hat{g}(x), \text{ για } g \in S(\mathbb{R}^n)$$

από $f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{f}(-\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$$

Πρόταση: $\mathcal{O}^\wedge: (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \rightarrow (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ είναι
ισομετρία.

$$\forall f \in S(\mathbb{R}^n), \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \quad (\text{Θεώρημα Plancherel})$$

Απόδειξη:

$$\|f\|_2^2 = \int f(y) \cdot \overline{f(y)} dy = \int \hat{f}(-y) \cdot \overline{\hat{f}(y)} dy =$$

$$= \int \hat{f}(y) \overline{\hat{f}(y)} dy \quad \begin{array}{l} \text{μετ. τόπος} \\ f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{array} \int \hat{f}(y) \cdot \overline{\hat{f}(-y)} dy =$$

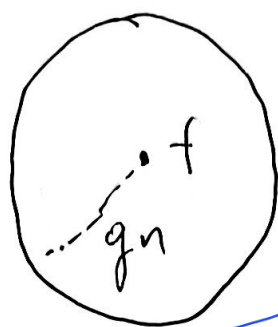
$$= \int |\hat{f}(y)|^2 dy = \|\hat{f}\|_2^2 \quad \checkmark$$

Οπ. $\wedge$ σε όλο των $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \exists (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $S(\mathbb{R}^n) : \|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$

τότε $\hat{g}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

για κάποια $\tilde{g}$. ορίζουμε: $\hat{f} := \tilde{g}$



$L^2(\mathbb{R}^n)$

→ Προσπαρά, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy στον $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$
 $\xRightarrow{\text{ισομερία}} (\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ επίσης Cauchy, και ο $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ είναι Banach.

⚠ Ο ορισμός είναι καλός. Αν $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $S(\mathbb{R}^n)$ τότε $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$ και $\|h_n - f\|_2 \rightarrow 0$,

τότε οι $(\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουν το ίδιο όριο στον $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Έστω $\hat{g}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \tilde{g}$, $\hat{h}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \tilde{h}$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$.

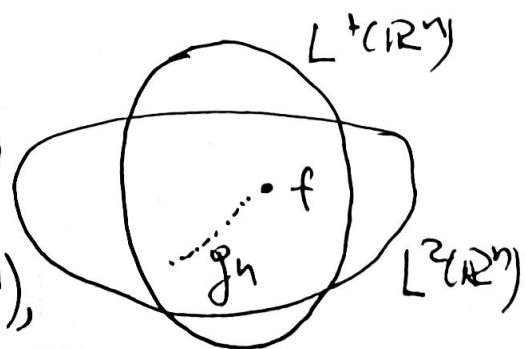
Τότε, $\hat{g}_n - \hat{h}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \tilde{g} - \tilde{h} \xRightarrow{\text{ισομ.}} \widehat{g_n - h_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \tilde{g} - \tilde{h}$

άρα $\|\tilde{g} - \tilde{h}\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{g_n - h_n}\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - h_n\|_2 = 0$

⚠ Ο κανονικός ορισμός του $\wedge$ δέχεται τον παλιό στην $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$:

Είχαμε ορίσει: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} \cdot f(x) dx$

Τώρα, ορίζουμε: $\mathcal{F}(f) :=$ το όριο, στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, της $(\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, για την ακολουθία $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $S(\mathbb{R}^n)$ με $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$.



Θέλουμε $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ λ-σ.π. και δναι:

Έστω $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συν $S(\mathbb{R}^n)$: $\|g_n - f\|_1 \rightarrow 0$

και $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$ (βέβαια θα $\exists$ τέτοια $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Τότε: • $\hat{g}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \mathcal{F}(f) \Rightarrow \exists (\hat{g}_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}: \hat{g}_{k_n} \rightarrow \mathcal{F}(f)$ κ.σ. λ-σ.π.

• $\|g_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\hat{g}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| =$

$$= |\widehat{(g_n - f)}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} (g_n - f)(x) d\lambda(x) \right|$$

$$\leq \int |g_n - f|(x) d\lambda(x) = \|g_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

Ανλ. $\hat{g}_n \rightarrow \hat{f}$ κ.σ. $\Rightarrow \hat{g}_{k_n} \rightarrow \hat{f}$ κ.σ.

Άρα $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ λ-σ.π.