

Θεώρημα: $\mathcal{O} \wedge: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$
είναι επί και ισομετρία:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

Απόδειξη: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

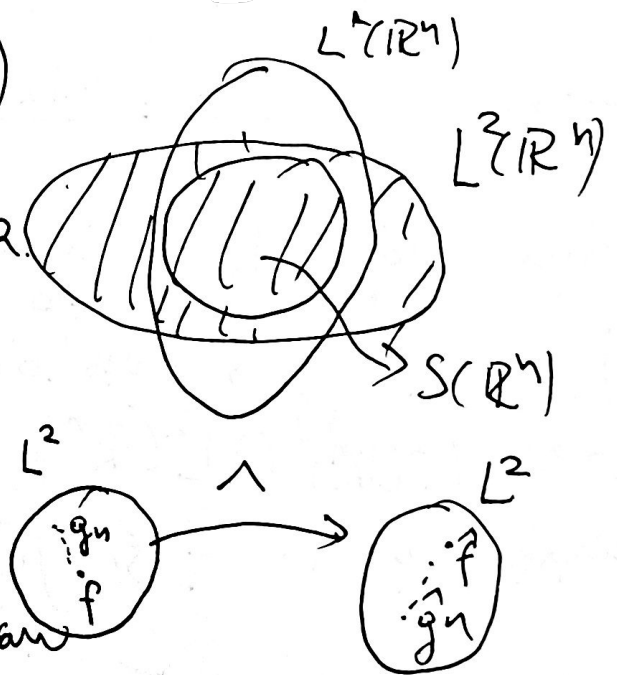
Ο $\hat{f}$ είναι το όριο στον $(L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$

μιας $(\hat{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Schwartz,

$$\text{με } \|\hat{g}_n - f\|_2 \rightarrow 0$$

Αντ. ο $\hat{f}$ είναι ένα όριο συζυγισμένων
στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. (Banach).

Αρα $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

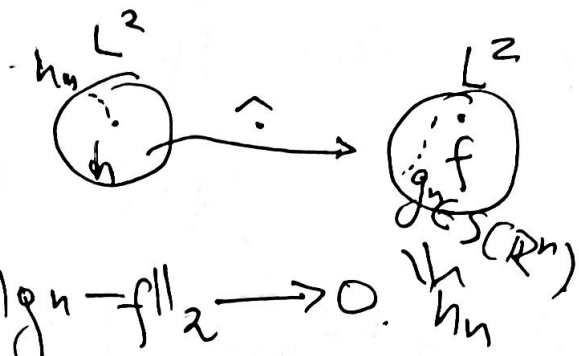


• επί:

έστω $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

ψάχνω $g \in L^2$ ώστε $f = \hat{g}$.

$\exists (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $S(\mathbb{R}^n)$ ώστε $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$.



$0 \neq \Lambda : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ είναι επί, και έσ $g_n = \hat{h}_n$, για κάποια Schwartz h_n . $\exists h \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|h_n - h\|_2 \rightarrow 0$ επειδή η $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον L^2 (αφού η $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον L^2).

Άρα $h_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} h$. Όμως, $\hat{h}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

Άρα, $f = \hat{h}$.

• ισομερία: $\forall f \in L^2, \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$:

παίρνω $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από Schwartz: $\|g_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

τότε: $\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}_n\|_2 \stackrel{\text{op}}{=} \|\hat{f}\|_2$

Schwartz (ισοφ. $\Lambda : S \rightarrow S$) $\left(\begin{array}{c} g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \\ \text{op} \uparrow \hat{g}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \hat{f} \end{array} \right)$

Θεώρημα Plancherel: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

έχουμε $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ①

Άρα $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ②

Απόδειξη: ① ✓

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} (\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|_2^2 + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|_2^2 - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|_2^2) = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

Έχουμε δει: $\int f \cdot \bar{g} = \int \hat{f} \bar{\hat{g}}$ ✓ (για f, g Schwartz).

Τώρα: $\int f \cdot \bar{g} = \int \hat{f} \bar{\hat{g}}$ ✓ (για $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$).

$$\text{Πχ: } \|f * f\|_2^2 = \int |f * f|^2 \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \int |\widehat{f * f}|^2 = \int |\hat{f} \cdot \hat{f}|^2 = \int |\hat{f}|^4.$$

→ Αρχή της αβεβαιότητας (του Heisenberg):

Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με $\|f\|_2 = 1$.

$$\text{τότε: } \left[\int x^2 |f(x)|^2 dx \right] \cdot \left[\int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

πρώτο μικρό για f που επικεντρώνεται στο 0. $\Rightarrow$ πρέπει να είναι μεγάλο.

Ισοδύναμα: $\forall x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left[\int (x-x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right] \cdot \left[\int (\xi-\xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

$$\text{Απόδειξη: } 1 = \int |f(x)|^2 dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N |f(x)|^2 dx =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[x |f(x)|^2 \right]_{-N}^N - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int x (f(x) \bar{f}(x))' dx =$$

$$= - \int x \cdot \underbrace{(f'(x) \bar{f}(x) + f(x) \overline{f'(x)})}_{2 \operatorname{Re}(f'(x) \cdot \bar{f}(x))} dx \Rightarrow$$

$$|z| = \sqrt{|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2} \geq |\operatorname{Re} z|$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \left| \int x \cdot \operatorname{Re}(f'(x) \cdot \bar{f}(x)) dx \right| \leq 2 \int |x| \cdot |f'(x) \cdot \bar{f}(x)| dx =$$

$$= 2 \int |x| |f'(x)| |f(x)| dx \leq$$

$$\stackrel{C-S}{\leq} 2 \left[\int |x|^2 |f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int |f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\stackrel{\text{Planchard}}{=} 2 \left[\int |x|^2 |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left[\int x^2 |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int 4\pi^2 |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \quad \left(|f(\xi)| = 4\pi^2 |\xi|^2 |f(\xi)|^2 \right)$$

$$= 4\pi \left[\int x^2 |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \checkmark$$

$$\text{Για: } \left[\int \underbrace{(x-x_0)^2}_{\text{"}} |f(x)|^2 dx \right] \cdot \left[\int \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

$$\stackrel{||}{\left[\int x^2 \underbrace{|f(x+x_0)|^2}_{g(x)} dx \right]} \cdot \left[\int \xi^2 \underbrace{|\hat{f}(\xi)|^2}_{e^{2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi)} d\xi \right] \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Για ωχαρία x_0, ξ_0 , χρειαζόμαστε την $g(x)$

$$\text{με } g(x) = e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x+x_0).$$

→ Τύπος άθροισης του Poisson: Θα μας βοηθήσει για
 Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ εξής:

- ① Αν ο $\hat{f}$ έχει συμπαγή φορέα, τότε η f δεν έχει συμπαγή φορέα
- ② λέμε ότι η f είναι "βήμα περιορισμένης ζώνης συχνοτήτων" (band limited), αν ο $\hat{f}$ έχει συμπαγή φορέα.

Αν η f είναι band limited, τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το βήμα f από μόνο αριθμητικές τιμές. (Nyquist's sampling theorem).

Θεώρημα (τύπος άθροισης Poisson): Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
 ορίζουμε την 1-περιοδικότητα της f ως εξής:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{με} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k).$$

$$\text{Τότε: } F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά για $x=0$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k \cdot 0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = F(0)$$

μετασχηματισμός (αχ) συνεξέλεσης):
 $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k x} f(x) dx.$

$$\text{δηλ: } \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$