

Ασκήσεις: Φυλλάδιο 1

Αρμονική Ανάλυση 2024-25

Προθεσμία παράδοσης: 18 Απριλίου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. a) Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in [0, 1).$$

Βρείτε τους συντελεστές Fourier της f .

- b) Έστω $g(x) = (\sin(2\pi x) + 2)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιά είναι η σειρά Fourier της g ; Ισούται με την g σε κάθε $x \in \mathbb{R}$;

2. Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = |x| \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- a) Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ 0, & k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

- b) Ισχύει ότι

$$|x| = \frac{1}{4} - \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k x} \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- c) Ισχύει ότι

$$|x| = \frac{1}{4} - \sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{\pi^2 k^2} \cdot e^{2\pi i k x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- d) Ανάμεσα σε όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού ≤ 4 , βρείτε εκείνο που απέχει λιγότερο από την f στον $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})})$.

- e) Βρείτε όλες τις $g \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα ότι $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η 1-περιοδική συνάρτηση με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ 0, & x \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Χωρίς να υπολογίσετε τους συντελεστές Fourier της f , δείξτε ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = +\infty.$$

4. Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a) Υπάρχει $f \in C^1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα ότι $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- b) Υπάρχει πραγματική $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(-3) = -3$ και $\widehat{f}(3) = 3$.
- c) Υπάρχει περιττή $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(0) = 1$.
- d) Αν μία $f \in L^1(\mathbb{T})$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε $\widehat{f}(k) \in \mathbb{R}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
- e) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = \widehat{f}(0).$$

5. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$, ορίζουμε

$$a_k(f) := 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi kx) d\lambda(x), \quad b_k(f) := 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi kx) d\lambda(x), \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Συμβολίζουμε τη σειρά Fourier της f με

$$Sf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Δείξτε ότι¹

$$\widehat{f}(k) = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \quad \text{και} \quad \widehat{f}(-k) = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

b) Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k(f) \cos(2\pi kx) + b_k(f) \sin(2\pi kx)].$$

(Αρκεί ναδειχθεί ότι οι δύο σειρές έχουν τα ίδια μερικά αθροίσματα - τότε το όριο των μερικών αθροισμάτων θα είναι εξ ορισμού το ίδιο, είτε υπάρχει είτε όχι.)

c) Δείξτε ότι, αν η f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε και η σειρά Fourier της f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές (δηλαδή, $Sf(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η σειρά $Sf(x)$ συγκλίνει).

d) Δείξτε ότι, αν η f είναι άρτια, τότε

$$Sf(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f) \cos(2\pi kx) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

ενώ, αν η f είναι περιττή, τότε

$$Sf(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f) \sin(2\pi kx) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

¹Σημείωση: Τα $a_k(f)$, $b_k(f)$ δεν είναι αναγκαστικά πραγματικοί αριθμοί, άρα εδώ δεν ισχυριζόμαστε ότι τα $\widehat{f}(k)$, $\widehat{f}(-k)$ είναι συζυγή.

6. a) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{1000} |\hat{f}(k)|^2 < +\infty.$$

- b) Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $k \cdot \hat{f}(k) \rightarrow 0$ καθώς $k \rightarrow \pm\infty$.

- c) (i) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περιοδική συνάρτηση με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\hat{f}(k) = - \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{2k}\right) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

- (ii) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ Lipschitz-συνεχής. Χρησιμοποιώντας το (c)(i), δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0, +\infty)$, που εξαρτάται μόνο από την f , ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

7. Έχουμε δείξει ότι, αν η $f \in C^n(\mathbb{T})$, τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^n}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή: όσο πιο 'λεία' είναι η f , τόσο πιο γρήγορα φθίνουν οι συντελεστές Fourier της. Σε αυτή την άσκηση θα δείξουμε ότι, σε κάποιο βαθμό, ισχύει και το αντίστροφο.

- a) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$, με την ιδιότητα ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^3} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

- (i) Εξηγήστε το ότι

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Υπάρχει ένα θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού που λέει ότι: Αν η $F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι τέτοια ώστε $F(x) \in \mathbb{C}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και επιπλέον η σειρά $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}'_k(x)$ συκλίνει ομοιόμορφα, τότε η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}'_k(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα, δείξτε ότι η $f \in C^1(\mathbb{T})$.

- b) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$, με την ιδιότητα ότι υπάρχουν $n > 3$ και σταθερά $C > 0$ ώστε

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|^n} \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Δείξτε ότι η $f \in C^{n-2}(\mathbb{T})$.