

## Ασκήσεις: Φυλλάδιο 2

### Αρμονική Ανάλυση 2024-25

Προθεσμία παράδοσης: 29 Μαΐου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. a) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$  και  $g \in L^1(\mathbb{T})$ . Δείξτε ότι η  $f * g$  είναι ομοιόμορφα συνεχής.  
b) Έστω  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  και  $g \in C_c(\mathbb{R})$  (δηλαδή συνεχής με συμπαγή φορέα). Δείξτε ότι η  $f * g$  είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη.  
c) Έστω  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  και  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Δείξτε ότι, αν η  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι ακολουθία στον  $L^1(\mathbb{R})$  με  $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$ , τότε  $\|f * g_n - f * g\|_\infty \rightarrow 0$ .  
d) Έστω  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  και  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Δείξτε ότι η  $f * g$  είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. (Εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα (b), (c).)  
e) Έστω  $A \subset \mathbb{R}$  Lebesgue-μετρήσιμο σύνολο, με την ιδιότητα ότι  $\chi_A * \chi_A(0) > 0$ . Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη  $(a_1, a_2) \in A \times A$  ώστε  $a_1 + a_2 = 0$ .
2. a) Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x$  για κάθε  $x \in [0, 1)$ .  
(i) Εξηγήστε πού συγκλίνει η σειρά Fourier  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$  της  $f$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
(ii) Έστω  $\mathcal{P}_2$  το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2. Βρείτε το  $p \in \mathcal{P}_2$  με  $\|p - f\|_2 = \min_{g \in \mathcal{P}_2} \|g - f\|_2$ , και υπολογίστε την απόσταση  $\|p - f\|_2$ .  
b) Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$  με
$$\hat{f}(2) = \hat{f}(-2) = 1, \quad \hat{f}(8) = \hat{f}(-8) = 2.$$
Βρείτε  $g \in C(\mathbb{T})$  ώστε  $f * g(x) = \cos(2\pi \cdot 5x) \sin(2\pi \cdot 3x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Δείξτε ότι, αν  $f \in C(\mathbb{T})$  με  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε υπάρχει ακολουθία  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  μη αρνητικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων (δηλαδή με  $p_n(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $n \in \mathbb{N}$ ), ώστε  $\|p_n - f\|_2 \rightarrow 0$ .
4. Έστω  $f \in C(\mathbb{T})$ , με την ιδιότητα ότι  $\hat{f}(k) = 0$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  που δεν είναι της μορφής  $\pm 2^n$  (για  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ).  
Επιπλέον, για κάθε  $N \in \mathbb{N}$ , ορίζουμε  $K_N := 2F_{2N} - F_N$ , όπου ο  $F_N$  είναι ο πυρήνας του Fejér.  
a) Εξηγήστε γιατί η  $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$  είναι ακολουθία καλών πυρήνων.  
b) Δείξτε ότι  $K_{2^n} * f(x) = s_{2^n}(f; x)$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  και  $x \in \mathbb{R}$ .  
c) Δείξτε ότι η  $f$  ισούται με τη σειρά Fourier της σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

5. Έστω  $\alpha \in (0, 1)$ , και έστω 1-περιοδική  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι  $\alpha$ -Hölder-συνεχής, δηλαδή ικανοποιεί ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^\alpha, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η  $f$  ισούται με τη σειρά Fourier της σε όλο το  $\mathbb{R}$ . (Παρατηρήστε ότι η Hölder-συνέχεια είναι μία ασθενέστερη μορφή Lipschitz-συνέχειας.)

6. Έστω  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Σταθεροποιούμε κάποιο διάστημα  $[a, b]$  στο  $\mathbb{R}$ . Έστω ότι, για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$ , ισχύει ότι  $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$  για κάθε  $x \in [a, b]$ . Τότε,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq C_k \lambda^{-1/k} \quad \text{για κάθε } \lambda > 0,$$

για μια σταθερά  $C_k$  που εξαρτάται μόνο από το  $k$  (και όχι από τα  $\lambda, \phi, a, b$  – π.χ. η  $C_k = 5 \cdot 2^{k-1} - 2$  λειτουργεί), σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

a)  $k = 1$  και  $\phi'$  μονότονη.

b)  $k \geq 2$ .

(Υπόδειξη για το (b): Κάνουμε επαγωγή στο  $k$ . Από Θ. Darboux, μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $\phi^{(k)} \geq 1$  στο  $[a, b]$ , άρα η  $\phi^{(k-1)}$  είναι αύξουσα. Άρα υπάρχει μοναδικό  $c \in [a, b]$  όπου η  $|\phi^{(k-1)}|$  γίνεται ελάχιστη. Δείξτε ότι ή αυτό το minimum είναι 0, ή επιτυγχάνεται σε κάποιο άκρο του  $[a, b]$ . Σε κάθε περίπτωση, ελέγξτε το ολοκλήρωμα που μάς ενδιαφέρει κατάλληλα κοντά στο  $c$  και κατάλληλα μακριά από το  $c$ .)

7. Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι να δώσει ένα κίνητρο για τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier. (Π.χ., γιατί χρειαζόμαστε όλα τα  $\xi$  στον Ευκλείδειο χώρο ως συχνότητες;)

Έστω  $L > 0$  και  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , με  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \notin [-L/2, L/2]$ . Ορίζουμε

$$c_L(k) := \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i x k / L} dx \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Ορίζουμε τη σειρά Fourier της  $f$  ως

$$Sf(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_L(k) e^{2\pi i x k / L}, \quad \text{για κάθε } x \in [-L/2, L/2].$$

Εξηγήστε τα εξής:

a) Αν  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , τότε

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_L(k)|^2.$$

b) Αν η  $f$  είναι Lipschitz-συνεχής, τότε

$$f(x) = Sf(x) \quad \text{για κάθε } x \in [-L/2, L/2].$$

(Κάποιες σκέψεις: Παρατηρήστε ότι  $c_L(k) = \frac{1}{L} \cdot \mathcal{F}f\left(\frac{k}{L}\right)$ , όπου με  $\mathcal{F}$  συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της  $f$ . Έτσι, το (a) λέει ότι

$$\int_{-L/2}^{L/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \left| \mathcal{F}f\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2.$$

Καθώς  $L \rightarrow +\infty$ , το δεξί μέλος θα πρέπει εν γένει να είναι καλή προσέγγιση του  $\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$ .

Το (b) λέει ότι

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f\left(\frac{k}{L}\right) e^{2\pi i x k/L} \quad \text{για κάθε } x \in [-L/2, L/2].$$

Καθώς  $L \rightarrow +\infty$ , το δεξί μέλος θα πρέπει εν γένει να είναι καλή προσέγγιση του  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$ .

Επομένως, ο τύπος που επιλέξαμε να δώσουμε για το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  είναι ο πλέον κατάλληλος για να ισχύουν το θεώρημα Plancherel και ο τύπος αντιστροφής.)