

Ασκήσεις: Φυλλάδιο 3

Αρμονική Ανάλυση 2024-25

Προθεσμία παράδοσης: 16 Ιουνίου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Δείξτε ότι ο τύπος άθροισης του Poisson ισχύει για κάθε $f \in C_c(\mathbb{R})$ που είναι Lipschitz-συνεχής (όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει ότι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής με συμπαγή φορέα). Συγκεκριμένα, ορίζουμε την 1-περιοδικοποίηση της f ως τη συνάρτηση

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(όπου ο $\widehat{f}(k)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f στο k).

2. a) Έστω $f \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1$.
b) Έστω $T > 0$, και $f \in S(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (-T, T)$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{2\pi T} \cdot \|f'\|_2.$$

- c) Έστω συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Έστω επιπλέον ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \operatorname{Re}(\widehat{f}(\xi)) d\lambda(\xi) = |x| e^{-x^2}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Βρείτε τον τύπο της f .

3. a) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα. Δείξτε ότι ο $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
b) Δώστε ένα παράδειγμα μιας $f \in L^1(\mathbb{R})$, με συμπαγή φορέα, ώστε $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ (δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας).
4. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (δε χρειάζεται να το αποδείξετε).

- a) Εξηγήστε γιατί $f \in S(\mathbb{R})$.
b) Δείξτε ότι υπάρχουν μη μηδενικές $h_1, h_2 \in S(\mathbb{R})$ ώστε η $h_1 * h_2$ να είναι η μηδενική συνάρτηση.

5. a) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R})$, με $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $f \in S(\mathbb{R})$.
 b) Έστω $f, g \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι η $f * g \in S(\mathbb{R})$.
 c) Έστω $f, g \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f \cdot g}(\xi) = \widehat{f} * \widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-10x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- a) Βρείτε τη συνάρτηση $\widehat{f}$.
 b) Βρείτε μια $g \in S(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f * g(x) = e^{-x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

7. Έστω $f \in S(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση¹

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\pi i \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

στον $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, με

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x\xi + t\xi^2)} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

ικανοποιεί και τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη.

- b) Δείξτε ότι, για κάθε $t \geq 0$,

$$u(x, t) = \widehat{g}_t(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου $g_t(\xi) := e^{2\pi i t \xi^2} \widehat{f}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

(Αυτό μάς λέει ότι, σε κάθε χρονική στιγμή, η λύση της εξίσωσης είναι μετασχηματισμός Fourier κάποιας 'καλής' συνάρτησης, που εξαρτάται μόνο από την αρχική συνθήκη.)

- c) Δείξτε ότι, για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $\|u(\cdot, t)\|_2 = \|f\|_2$.

¹Η διαφορική εξίσωση εδώ είναι η γραμμική Schrödinger. Στην ουσία η u είναι ο μετασχηματισμός Fourier, στον $\mathbb{R}^2$, μίας συνάρτησης που ορίζεται στην παραβολή $\{(\xi, \xi^2) : \xi \in \mathbb{R}\}$ (καθώς η εκθετική στο (a) έχει στον εκθέτη της $\langle(x, t), (\xi, \xi^2)\rangle$). Αν αντικαθιστούσαμε το ξ^2 με $|\xi|$, θα παίρναμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης (και ως σχήμα τον κώνο). Αν αντικαθιστούσαμε το ξ^2 με $\sqrt{1 - \xi^2}$ στο $[-1, 1]$, η λύση θα αντιστοιχούσε στην εξίσωση Helmholtz (και το σχήμα θα ήταν το άνω ημικύκλιο της S^1). Και συνεχίζει να ισχύει το (c): η ενέργεια της λύσης σε κάθε χρονική στιγμή παραμένει αμετάβλητη, και είναι ίδια με την ενέργεια της αρχικής συνθήκης f .