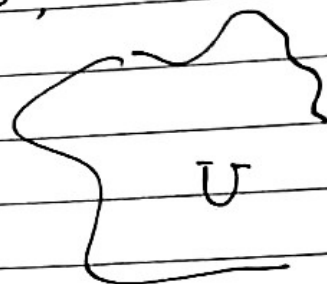


$U = \text{ανοικτό}$, $\subset \mathbb{R}^n$

Διάλεξη 1

$\underline{U_p}$: $u, v \in L^1_{loc}(U)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$D^\alpha u = v$ (αδυναμικά διαφορώμενος)



$$\Leftrightarrow \int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \phi v dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Συμβολισμός : $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$

Παρατήρηση

Αν u είναι κλασικά διαφορώμενος και $u \in L^1_{loc}$,

τότε είναι αδυναμικά

π.χ. αν $u \in C^1$ τότε

$$\int_U u \phi_{x_i} dx = \int_U \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u \phi) - u_{x_i} \phi \right] dx = \int_U \frac{\partial}{\partial x_i} (u \phi) dx - \int_U u_{x_i} \phi dx$$

$\phi \in C_c^\infty$

Λήμμα 1 (Παράγωγο αδυναμικά Παρ.)

Η α -αδυναμικά της u , αν υπάρχει, ορίζεται μοναδικά α.ε.

ΑΠ

Εστω οχι : $\exists \bar{u}, \bar{v} \in L^1_{loc}$

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \bar{u} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \bar{v} \phi dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

$$\therefore \int_U (\bar{u} - \bar{v}) \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U)$$

Εστω $f = \bar{u} - \bar{v}$

Εξάγετε ότι $\int f \varphi dx = 0$, $f \in L^1_{loc}$, $\forall \varphi \in C_c^\infty$.

Θα δείξουμε ότι $f \equiv 0$ a.e.

Εξάγετε ότι οι C_c^∞ είναι πυκνές στις L^1_{loc} , και για τον σκοπό αυτόν θα χρησιμοποιήσουμε

Επιλέγουμε $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty$, $\varphi_n \rightarrow \frac{f}{|f|}$ a.e., $|\varphi_n| \leq 1$

Εστω $K \subset \mathbb{R}$, συμπαγής.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f \varphi_n dx = \int_K f \frac{f}{|f|} dx = \int_K |f| dx$$

(Lebesgue Theorem)

από Lebesgue - κυριαρχούμενος σύγκριση:

$$|f \varphi_n| \leq |f|, \quad f \in L^1(K).$$

K

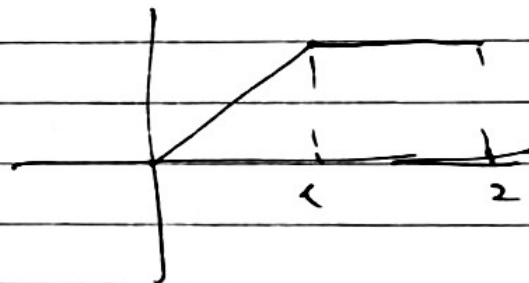
□

Παραδείγματα

$$1) u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

• $u' = v$ (απόδειξη)



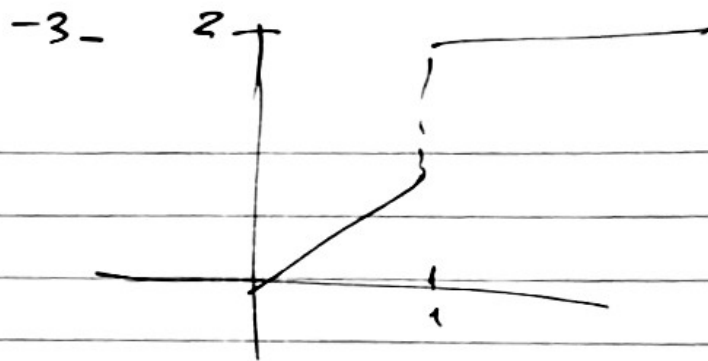
$$\varphi \in C_c^\infty(0,2)$$

Επαγωγή:

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \varphi' dx &= \int_0^1 x \varphi' dx + \int_1^2 1 \cdot \varphi' dx \\ &= x \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= - \int_0^2 v \varphi dx \end{aligned}$$

□

$$2) u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$



• $\nexists$ αόριστος παράγωγος

Επαγωγή

Εστω ότι υπάρχει: $\int_0^2 u \varphi' dx = - \int_0^2 v \varphi dx, \forall \varphi \in C_c^\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \varphi' dx &= \int_0^1 x \varphi' dx + 2 \int_1^2 \varphi' dx \\ &= x \varphi(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx + 2 [\varphi(2) - \varphi(1)] \\ &= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx \end{aligned}$$

Εντός

$$(*) \quad \varphi(1) + \int_0^1 \varphi dx = \int_0^2 v \varphi dx$$

Επιλέγουμε τώρα κατασκευές φ :

a) Εστω $\varphi(1) = 0$, αντιστρέφω κατά τ'αξία:

$$(**) \quad \int_0^1 \varphi dx = \int_0^1 v \varphi dx + \int_1^2 v \varphi dx$$

b) Εστω πρῶτα $\varphi \equiv 0$ στο $(1, 2)$

$$(**) \Rightarrow \int_0^1 \varphi dx = \int_0^1 v \varphi dx \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi (v-1) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty$$

(βλ. απόδειξη Λιτράι)

$$\Rightarrow v \equiv 1 \text{ α.ε. στο } (0, 1) \quad (1)$$

c) Πίσω στην (**)

$$\int_0^1 \varphi dx = \int_0^1 \varphi dx + \int_1^2 v \varphi dx, \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

$$\therefore \int_1^2 v \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$$\Rightarrow v \equiv 0, \text{ στο } (1,2) \quad (2)$$

d) Πρώτη τμήμα στην $(*)$:

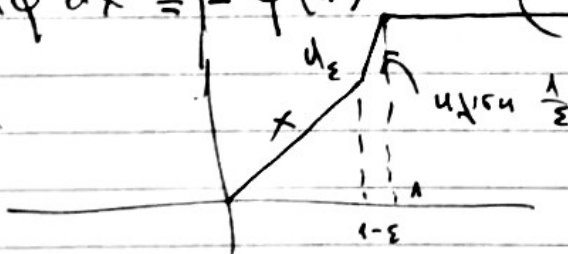
$$\varphi(1) + \int_0^1 \varphi dx = \int_0^2 v \varphi dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

$$\therefore \varphi(1) = 0 \quad \underline{\text{αποστο}} \quad \square$$

Σημ: $u' = \delta_0$ (Distributions) $\notin L^1(U)$

$$\therefore \int_0^2 u \varphi' dx = -\varphi(1) \quad (M(U) = C_c^*(U))$$

Γραφιστικά



$$\begin{aligned} \int_0^2 u_\epsilon \varphi' dx &= x \varphi(x) \Big|_0^{1-\epsilon} + \int_{1-\epsilon}^1 u_\epsilon \varphi' dx + \varphi(2) - \varphi(0) \\ &= (1-\epsilon) \varphi(1-\epsilon) - \varphi(1) + \int_{1-\epsilon}^1 u_\epsilon \varphi' dx \\ &= (1-\epsilon) \varphi(1-\epsilon) - \varphi(1) + \left[u_\epsilon \varphi \Big|_{1-\epsilon}^1 - \int_{1-\epsilon}^1 u_\epsilon' \varphi \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\varphi(1)$$

$\square$

2. W^k_p (Sobolev Χῆρος)

$$W^{k,p}(U) = \left\{ u \in L^p_{loc}(U), \exists D^\alpha u \text{ vopha } \|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \text{αδῶνς, } |\alpha| \leq m, \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(U)} \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)} \end{cases} \right\}$$

Πῆρος Χῆρος

Σῆρος Χῆρος

(i) $u_m \rightarrow u$ $W^{k,p}_0(U)$ ὑψᾶνς

$\forall V \subset\subset U$ (σῆρος ὑψᾶνς), $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(V)} \rightarrow 0$

(ii) $W^{k,p}_0(U) = \overline{C^\infty_0(U)} \rightarrow W^{k,p}(U)$

ἢ ὑψᾶνς $W^{k,p}_0(U) \neq W^{k,p}(U)$

(Οῦς $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(U)$)
(ὑψᾶνς)

(iii) Για $p=2$ σῆρος Χῆρος $H^k_0(U), H^k(U)$

Ἀσῆση 4, ἔνς (δ. 306)

ἔνς $n=1$, $u \in W^{1,p}(0,1)$, $1 \leq p < \infty$

Ἰσῆνς τᾶ ὑψᾶνς:

(a) u ὑψᾶνς ὑψᾶνς, $u' \in L^p(0,1)$

(b) Για $1 < p < \infty$ ὑψᾶνς

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Σημ (Αντιπροσωπεία)

Οι σκευτικές Sobolev προσδιορίζονται ~~μια~~ α.ε.

Αυτή η απροσδιοριστία αρείται θεωρώντας την
ακριβή αντιπροσωπεία f^* :

Δίδουμε $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ χαρακτηρίστε ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x) \quad \text{α.ε.}$$

(Θεώρημα Lebesgue).

Ορίζουμε $\forall x$! $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f dy$, όταν το πλο
υπάρχει
 $f^*(x) = \begin{cases} \text{το πλο} & \text{όταν δεν υπάρχει} \end{cases}$

Η f^* ορίζεται $\forall x$. Αν $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f=g$ α.ε.
 $\Rightarrow f^* = g^* \quad \forall x$!

Παραδείγματα Σκευτικών Sobolev (περισσότερο εύκολο όσο
αυξάνεται η διάσταση n)

Α) $U = \{x \mid 1 < x < 2\} \subset \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad (x \neq 0), \quad \alpha > 0, \quad p \geq 1$$

$$\bullet u \in W^{1,p}(U) \iff \alpha < \frac{n-p}{p} = \frac{n}{p} - 1$$

Επαγωγή

Για $x \neq 0$ η κλασική παράγωγος υπάρχει:

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} |x|^{-\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i} (|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} = \left(-\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_k) (|x|)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \\ &= \left(-\frac{\alpha}{2}\right) 2 \delta_{ki} x_k (|x|)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \\ &= (-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\frac{\alpha}{2}+2}} \end{aligned} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{x_i}{|x|} \right) \leftarrow \text{ιδέα}$$

Θα δείξουμε ότι για $\alpha < \frac{n-p}{p}$ η ανώτερη παράγωγος u_{x_i}

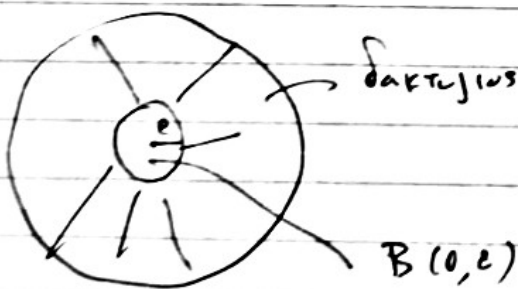
είναι $v = (-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\frac{\alpha}{2}+2}} \in L^p(U)$:

$$(*) \int_U u \varphi_{x_i} dx = - \int_U (-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\frac{\alpha}{2}+2}} \phi dx$$

$$\begin{aligned} |v| &\leq \alpha \frac{1}{|x|^{\frac{\alpha}{2}+2}} \\ \alpha + 1 &< \frac{n}{p} - 1 + 1 \\ &= \frac{n}{p} \end{aligned}$$

φ συνεχής
δυναμική

Απόδειξη της (*)



$$\varphi \in C_c^\infty(B(0, \varepsilon))$$

$$\begin{aligned} |v|^p &< C \frac{1}{|x|^{p(\frac{\alpha}{2}+2)}} \\ \int \frac{1}{r^{p(\frac{\alpha}{2}+2)}} r^{n-1} dr &< +\infty \end{aligned}$$

$$(*) \int_{U \setminus B(0, \varepsilon)} u \varphi_{x_i} dx = \int_{U \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_i} (u \varphi) dx - \int_{U \setminus B(0, \varepsilon)} u_{x_i} \varphi dx =$$

Θεωρούμε Ακέραιους: $\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} dx = \int_{\partial \Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$, $\vec{V} \perp \partial \Omega$, $|\vec{V}| = 1$

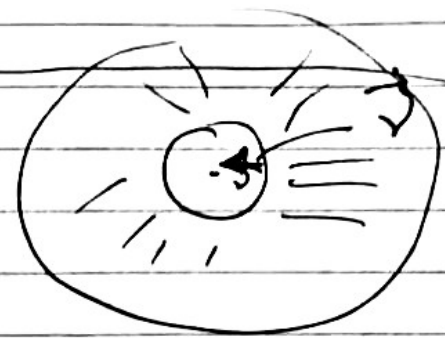
$\vec{V} = (V_1, \dots, V_n)$

$\operatorname{div} \vec{V} = \sum \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$

$\vec{V} = (v^1, \dots, v^n)$

$$\vec{V} = (0, \dots, 0, u\varphi, 0, \dots, 0)$$

$$= \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u\varphi v^i dS - \int_{U-B(0, \varepsilon)} u_{x_i} \varphi dx$$



$$\left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u\varphi v^i dS \right| \leq \| \varphi \|_{L^\infty} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} e^{-\alpha} dS = \| \varphi \|_{L^\infty} C_n e^{\frac{n-1-\alpha}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\left(\alpha < \frac{n}{p} - 1 \leq n-1 \right)$$

Θα δείξαμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U-B(0, \varepsilon)} u_{x_i} \varphi dx = (-\alpha) \int_U \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} \varphi dx$$

Προκύπτει από Lebesgue (κυριαρχούμε)

$$u_{x_i} \varphi \mathbb{I}_{U-B(0, \varepsilon)} \rightarrow (-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} \varphi \quad \text{συντεταγμένα}$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση.

$$\left| u_{x_i} \varphi \mathbb{I}_{U-B(0, \varepsilon)} \right| \leq |u_{x_i}| |\varphi|_{L^\infty} \leq \frac{|x_i|}{|x|^{\alpha+2}} |\varphi|_{L^\infty}$$

$$\leq \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} |\varphi|_{L^\infty}$$

$$\boxed{\alpha+1 < \frac{n}{p} \leq n}$$

$$\int_U \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} r^{n-1} dr < +\infty$$

Π(0) < ∞

$$(\alpha+1-n+1 < 1)$$

Lebesgue (κυριαρχούμενος συζυγίας)

$$\int_U u_{x_i} \varphi dx = \int_U (-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} \varphi dx$$

και $(-\alpha) \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}} \in L^p(U)$
 (βλ. π.ε. ιδέα -7-).

□

B) Έστω $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ οι ριζες στο $U = B^o(0,1)$

Ορίζουμε

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha}, \quad x \in U$$

$$=: \sum u_k(x) \frac{1}{2^k}, \quad u_k(x) = \frac{1}{|x - r_k|^\alpha}$$

• $u \in W^{1,p}(U)$ για $\alpha < \frac{n-p}{p} = \frac{n}{p} - 1$

← από Παράδειγμα 1

Προκύπτει ότι $\|u_k\|_{W^{1,p}} < C$ (ανεξαρτητική k)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|u_k\|_{W^{1,p}} < C$$

Σχόλιο: u δεν φράσσεται $\forall$ υποσύνολο του U !
 (= ∞ σε αριθμητικό μέγεθος).

□