Διάλεξη 10 : Η εκτίμηση του Morrey

Σημ: Δείξαμε ότι $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$, $1 \le p < n$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$
Για $p = n$, φορμαλιστικά έχουμε ότι $p^* = \infty$.
Όμως δεν ισχύει ότι $W^{1,n}(U) \hookrightarrow L^\infty$ $(n \ge 2)$.

Άσκηση 14, Evans.

Ισχύει όπως θα δούμε ότι

(1) $$W^{1,n}(U) \hookrightarrow BMO(U).$$

#

Morrey Ανισότητα

$1 < n < p \le \infty$

Θεώρημα

U ανοικτό, φραγμένο $\subset \mathbb{R}^n$, $\partial U \in C^1$

Δοθείσης $u \in W^{1,p}$ $\exists$ αντιπρόσωπος $\hat{u} : U \to \mathbb{R}$, $\hat{u} \in C^{0,\gamma}(U)$
($u = \hat{u}$ a.e. στο $\bar{U}$)

(2) $$\|\hat{u}\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \le c\,\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

$c = c(p, n, U)$, $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, $\forall\, u \in C^1(\mathbb{R}^n)$

(*) Άσ 2 Evans. Επίσης δείξτε ότι αν $\alpha > 1$ τότε $C^{0,\alpha}(U)$ αποτελείται από σταθερές συναρτήσεις ($u = c$).

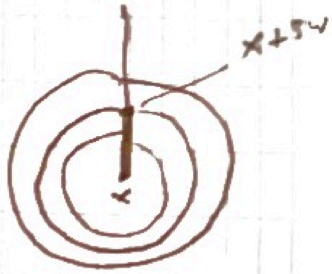
Απ

(A) $$\boxed{\fint_{B(x,r)} |u(x)-u(y)|\,dy \le C \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy \qquad \forall\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^n, \quad C = C(n).}$$

$$\fint = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)}$$

Απ (A)

$|w|=1$, φιξαρισμένο, $0<s<r$



(3) $$|u(x+sw)-u(x)| = \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^s \nabla u(x+tw)\cdot w\,dt \right|$$

$$\le \int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,|w|\,dt$$

$$= \int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,dt$$

∴

(4) $$\boxed{\int_{|w|=1} |u(x+sw)-u(x)|\,dS_w \le \int_0^s \int_{|w|=1} |\nabla u(x+tw)|\,dS_w\,dt}$$

2ον μέλος

Αντικατάσταση : $y = x+tw$, $|y-x| = t$

(5) $$\int_{|w|=1} |\nabla u(\underbrace{x+tw}_{})|\,dS_w = \int_{\partial B_t(x,t)} |\nabla u(y)| \frac{dS_w}{dS_y}\,dS_y = \int_{\partial B_t(x,t)} \frac{|\nabla u(y)|}{t^{n-1}}\,dS_y$$

Κατά συνέπεια

$$(6) \quad \int_0^s \int_{|w|=1} |\nabla u(x+tw)|\, dS_w\, dt = \int_0^s \int_{\partial B_t(x,t)} \frac{|\nabla u(y)|}{t^{n-1}}\, dS_y\, dt$$

$$= \int_{B(x,s)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy \le \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy.$$

μη αρνητική.

1ον μέρος

$$(7) \quad \int_{|w|=1} |u(x+sw)-u(x)|\, dS_w =$$

$$z = x+sw \Rightarrow dS_z = s^{n-1} dS_w$$

$$= \frac{1}{s^{n-1}} \int_{\partial B(x,s)} |u(z)-u(x)|\, dS_z$$

$$(4),\ (6),\ (7) \Rightarrow$$

$$(8) \quad \int_{\partial B(x,s)} |u(z)-u(x)|\, dS_z \le s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} |u(z)-u(x)|\, dS_z\, ds \le \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}.$$

Η (A) αποδείχθηκε.

B Περί της ιδιομορφίας $\frac{1}{|x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}$

$\sigma = \frac{p}{p-1}$

(9) $$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^{\sigma(n-1)}} dx \underset{\boxed{\text{σφαιρικές}}}{\overset{\boxed{\text{Fubini}}}{=}} \int_0^1 \left(\int_{S_r^{n-1}} \frac{1}{|r|^{\sigma(n-1)}} dS_r \right) dr$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|r|^{\sigma(n-1)}} r^{n-1} dS \right) dr$$

$(dS_r = r^{n-1} dS_1 = r^{n-1} dS)$

$$= \int_{\partial B(0,1)} \left(\int_0^1 r^{(n-1)-\sigma(n-1)} dr \right) dS$$

Ολοκληρωσιμότητα $\iff (n-1)-\sigma(n-1) > -1 \iff p > n.$

$\therefore$

(10) $$|u(x)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)|$$

$\Rightarrow$

(11) $$\fint_{B(x,1)} |u(x)| dy \leq \fint_{B(x,1)} |u(x)-u(y)| dy + \fint_{B(x,1)} |u(y)| dy$$

$\| \quad u(x) \frac{1}{|B_1|}$!

$$\leq c \int_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy + c \|u\|_{L^p(B(x,1))}$$

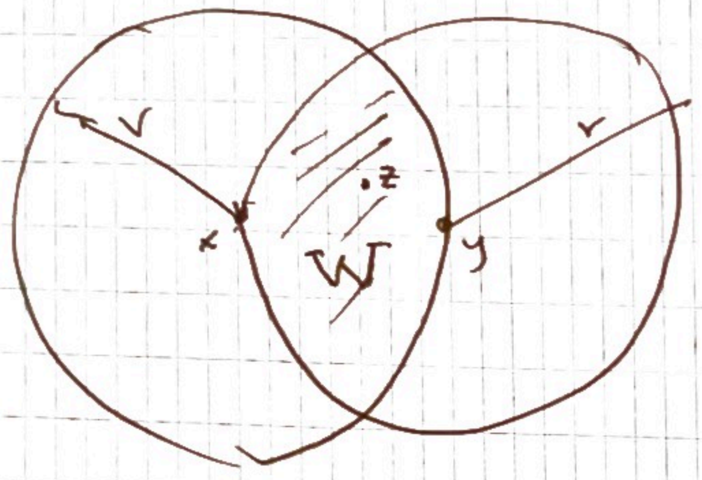
$$\leq c \left(\int_{B(x,1)} |\nabla u|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)\sigma}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + c \|u\|_{L^p(B_1)}$$

Συμπέρασμα: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ (12)

C Coda

Επιλέγουμε $x, y \in \mathbb{R}^n$, $r = |x-y|$

$W = B(x,r) \cap B(y,r)$



$\mathcal{L}^n(W) =: |W|$

$$|u(x)-u(y)| \le |u(x)-u(z)| + |u(z)-u(y)|$$

$$\Rightarrow \int_W |u(x)-u(y)|\,dz \le \int_W |u(x)-u(z)|\,dz + \int_W |u(z)-u(y)|\,dz$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \end{array}$$

$$|u(x)-u(y)|\,\mathcal{L}^n(W) \le \text{—"—} + \text{—"—}$$

$\therefore$

$$(15)\quad |u(x)-u(y)| \le \fint_W |u(x)-u(z)|\,dz + \fint_W |u(z)-u(y)|\,dz$$

$\underline{(i)}$ $$\fint_W |u(x)-u(z)|\,dz \le \frac{1}{|W|}\int_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|\,dz$$

$$\le \frac{|B(x,r)|}{|W|} \fint_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|\,dz$$

<u>Προσοχή</u>: $\dfrac{|B(x,r)|}{|W|} \le C$, C ανεξάρτητη του r!

$$\sigma = \frac{p}{p-1}$$

$$\overset{(\lambda)}{\leq} C \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}}\, dz$$

$$\leq C \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u(z)|^p dz \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,r)} \frac{dz}{|z-x|^{\sigma(n-1)}} \right)^{1/\sigma}$$

$$= C r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Παρομοίως

(ii) $$\fint_W |u(z)-u(y)|\, dz \leq C r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$\therefore$

(13) $\Rightarrow$

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

$\square$