

(86)

Διάλεξη 12Συνταγές Εφαρμογών

Ορ: X, Y χώροι Banach $X \hookrightarrow Y$, " X συμπαγώς στα Y "
αν ισχύουν

$$(i) \quad X \hookrightarrow Y \iff \|u\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad (\text{και } X \subset Y)$$

$$(ii) \quad \forall \{u_n\} \subset X, \|u_n\|_X \leq K, \exists \text{ υποσειρά } \{u_{n_k}\}$$

$$u_{n_k} \xrightarrow{Y} u$$

Άσκηση 1.12

Εστω $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$, χώροι Banach και εστω

$$(i) \quad X \hookrightarrow B,$$

$$(ii) \quad B \hookrightarrow Y.$$

Τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists$ σταθερά $C_\varepsilon > 0$, τ.ω. $\forall u \in X$ ισχύει

$$(1) \quad \|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Y \quad (A) \text{ ποσοτική ανισότητα}$$

#

Άσκηση 2.12

A) Εστω ότι ισχύει η (1), και εστω $C_\varepsilon = C e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Αντίστε την ποσοτική ανισότητα

$$(2) \quad \|u\|_B \leq C \|u\|_X^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|u\|_Y^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (\text{Poincaré})$$

B) Αντίστροφα δείξτε ότι αν ισχύει η (2), τότε προκύπτει και η (1).

#

(87)

Η βασή των Θεωρημάτων Σταθμικής Συναρτησιότητας
ARZELA-ASCOLI θεωρία

$$C(\Omega) = \left\{ \text{συνεχες } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{\Omega} |f_m| =: \|f\| \right\}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, πεπεσμένο

Ισχύει το ακόλουθο:

Ενα υποσύνολο $S \subset C(\Omega)$ είναι (σχετικά) σφαιρικά

$\Leftrightarrow$

(i) $\exists K_1 > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq K_1, x \in \Omega, \forall f \in S$

(ii) S είναι ισοσυνεχές: Δοθέντος $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$

(3) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ αν $|x - y| < \delta(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon)$ ομοιομορφία εγγύτητας $\forall f \in S$.

Σημαντική Σημείωση

Η (3) προκύπτει ~~απ~~ αν $\exists K$ τ.ω. ομοιόμορφα από τις εγγύτητες ισχύει:

(i) $|f| < K, \forall f \in S$

(ii) $|f(x) - f(y)| < K|x - y|, \forall f \in S$

(iii) $|f(x) - f(y)| < K|x - y|^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), $\forall f \in S$.

~~##~~

(88)

Θεώρημα Συμμετρίας Rellich - Kondrakov

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό
φραγμένο

$$W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U), \quad 1 \leq q < p^*$$

Απόδειξη

(1) Θεωρείτε να δείξετε ότι ακολουθία $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(U)$

$$\|u_m\|_{W_0^{1,p}(U)} < K_1$$

$\exists$ υποακολουθία $\{u_{m_j}\} \subset \{u_m\}$, τ.ω.

$$(3) \quad u_{m_j} \rightarrow u \quad \text{στο} \quad L^q(U)$$

Από το (GNS) δείχνεται γρήγορα ότι $W_0^{1,p} \subset L^q$
 $(\Rightarrow \exists C > 0)$

$$(4) \quad \|u_m\|_{L^q(U)} \leq C \|u_m\|_{W_0^{1,p}}$$

(2) Επιλέγουμε V , ανοικτό, φραγμένο, $U \subset \subset V$, και
εξετάζουμε στοιχεία $u \equiv 0$ στο $V \setminus U$ τις ακολουθίες
στο $W_0^{1,p}(U)$.
Κατά συνέπεια

$$(5) \quad \text{spt } u_m \subset V, \quad \|u_m\|_{W_0^{1,p}(V)} < K_1$$

(3) Δείχνετε τις απαλαυνόμενες (mollified) εκδόσεις των u_m :

$$(6) \quad u_m^2 := \gamma_\varepsilon * u_m \quad (\text{όχι } \varepsilon_0 \Rightarrow \text{spt } u_m^2 \subset V)$$

(89)

$$(7) \quad u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^q(V)} u_m$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΑ ως προς m !

Απόδειξη της (7)

$$A) \quad u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right) (u_m(z) - u_m(x)) dz$$

$$\left(y = \frac{x-z}{\varepsilon} \right) = \int_{B(0,1)} \eta(y) (u_m(x - \varepsilon y) - u_m(x)) dy$$

$$= \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (u_m(x - \varepsilon t y)) dt \right) dy$$

$$= -\varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \nabla u_m(x - \varepsilon t y) \cdot y dt \right) dy.$$

$\therefore$

$$(8) \quad \int_V |u_m^\varepsilon - u_m| dx \leq \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_m(x - \varepsilon t y)| dx \right) dt \right) dy$$

$$(|\eta(y)| \leq C) \quad = \varepsilon \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_0^1 \left(\int_V |\nabla u_m(z)| dz \right) dt \right) dy$$

$$\leq \varepsilon C \int_{B(0,1)} \eta(y) \left(\int_V |\nabla u_m(z)| dz \right) dy$$

$$\leq 2C |B(0,1)| \int_V |\nabla u_m(z)| dz$$

(90)

$$\leq 2C \|B\|_{1,1} \left(\int_V |\nabla u_{\varepsilon}|^p dx \right)^{1/p} |V|^{1-\frac{1}{p}} \\ \leq 2\bar{C}$$

 $\therefore (8) \Rightarrow$

$$(9) \quad \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^1(V)} \leq C\varepsilon$$

B) $\sqrt{\text{intermediate}}$

$$D^{\alpha} u_{\varepsilon}^2 = \gamma_{\varepsilon}^{\alpha} D^{\alpha} u_m, \quad \|D^{\alpha} u_{\varepsilon}\|_{L^p(V)} \leq \|D^{\alpha} u_m\|_{L^p(V)} \quad (10)$$

Also (GNS)

$$(11) \quad \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq C \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{W^{1,p}(V)}^{(11)} \leq 2C \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} \\ \leq 2CK_1 =: \tilde{C}$$

C) Also Hölder

$$(12) \quad \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^q(V)}^{\frac{1}{q}} \leq \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^p(V)}^{\theta} \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \\ \left(\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^*} \right)$$

 $\therefore (9), (12) \Rightarrow$

$$(13) \quad \|u_{\varepsilon}^2 - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\varepsilon^{\theta}$$

 $\forall (7) \text{ as desired.}$

(91)

- (4) Ο όγκος V είναι χωρικοποιημένος το Arzelà-Ascoli
για τις $\{u_m^\varepsilon\}$ που είναι ομαλές συναρτήσεις.

Θα δείξουμε ΤΙΑ ΕΞΟ ΦΙΞΑΡΙΣΚΕΝΟ τις εκτιμήσεις:

$$(14) \quad |u_m^\varepsilon(x)| < C(\varepsilon), \quad x \in V,$$

και ισωνεχία: $\forall \bar{\delta} \exists \Delta = \Delta(\bar{\delta}, \varepsilon), \text{ τ.ω.}$

$$(15) \quad |x-y| \leq \Delta(\bar{\delta}, \varepsilon) \implies |u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leq \bar{\delta}$$

Απόδειξη των (14), (15)

Προσφορφή Φεγγα (14)

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \int_{B(x, \varepsilon)} \gamma_\varepsilon(x-y) |u_m(y)| dy \leq \|\gamma_\varepsilon\|_{L^\infty} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^a}$$

Ισωνεχία (15)

$$u_m^\varepsilon(x) = \int_{B(x, \varepsilon)} \gamma_\varepsilon(x-y) u_m^\varepsilon(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_\varepsilon(x-y) u_m^\varepsilon(y) dy$$

(92)

$$\nabla u_m^{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \gamma_{\varepsilon}(x-y) u_m^{\varepsilon}(y) dy$$

$$\leq \|\nabla \gamma_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m^{\varepsilon}(y)| dy$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}$$

⑤ Θα εφαρμόζατε τώρα ένα διάγραμμα επιχείρησής :

Επιλέγετε μία ακολουθία $\varepsilon_n \rightarrow 0$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \rightarrow 0$$

Θεωρείτε τώρα $\{u_m^{\varepsilon}\}_{m=1}^{\infty}$. Από Arzela-Ascoli (AA)

αυτή η ακολουθία είναι ομοφύγου στο $C(V)$ και

ομοφύγου και στο $L^q(V)$ διότι $C(V) \subset L^q(V)$

Προκύπτει ότι $\exists$ υποακολουθία ως προς m

$$(16) \quad u_{m_1(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1}, u_{m_2(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1}, \dots, u_{m_j(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1} \xrightarrow[(m_j(\varepsilon_1) \rightarrow +\infty)]{L^q(V)} u^{\varepsilon_1}$$

(93)

ΙΔΕΑ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^\varepsilon \text{ συγκλίνει στο } u_m \text{ όπως } \varepsilon \rightarrow 0 \\ u_m^\varepsilon \text{ συγκλίνει στο } u^\varepsilon \text{ όπως } m \rightarrow +\infty \end{array} \right. + \text{Εκτίμηση (13)}$$

Θεωρούμε τώρα την $\left\{ u_{m_j(\varepsilon_i)}^{\varepsilon_i} \right\}_{j=1}^{\infty}$.

Από ΑΑ $\exists$ υπακομότητα $\left\{ m_k(\varepsilon_2) \right\}_{k=1}^{\infty}$ της της

$$m_1(\varepsilon_1), m_2(\varepsilon_1), \dots, m_j(\varepsilon_1), \dots$$

$$u_{m_1(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2}, u_{m_2(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2}, \dots, u_{m_j(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2} \xrightarrow[(m_j \rightarrow +\infty)]{L^q(V)} u^{\varepsilon_2}$$

$$\left(m_1(\varepsilon_2) > m_1(\varepsilon_1), m_2(\varepsilon_2) > m_2(\varepsilon_1), \dots, m_j(\varepsilon_2) > m_j(\varepsilon_1), \dots \right)$$

~~$$\begin{array}{ccccccc} u_{m_1(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1} & , & u_{m_2(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1} & , & \dots & , & u_{m_j(\varepsilon_1)}^{\varepsilon_1} & , & \dots & \xrightarrow{L^q(V)} & u^{\varepsilon_1} \\ u_{m_1(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2} & , & u_{m_2(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2} & , & \dots & , & u_{m_j(\varepsilon_2)}^{\varepsilon_2} & , & \dots & \xrightarrow{L^q(V)} & u^{\varepsilon_2} \end{array}$$~~

$$u_{m_1(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n}, u_{m_2(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n}, \dots, u_{m_j(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n}, \dots \xrightarrow{L^q(V)} u^{\varepsilon_n}$$

Η επιτυχία των διαφανών επιχειρημάτων που α κανατέ
πατάει στο ότι δόκατος $\delta > 0$, για $\varepsilon \leq \varepsilon_0$
ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΑ ως προς m .

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \delta/2.$$

(47)

θεωρούμε την ακολουθία

$$(17) \quad \left\{ u_{m_j(\varepsilon_j)} \right\} \subset L^q(V), \quad j=1,2,\dots$$

Δίδεται $\delta > 0 \quad \exists \quad N(\delta)$ τ.ω.

$$(18) \quad \| u_{m_n(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n} - u_{m_k(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k} \|_{L^q(V)} < \delta, \quad k, n > N$$

(αποδείξτε πρόβλημα ως προς ε την ορμή της ακολουθίας u_n)

Θα δείξουμε ότι η (17) είναι Cauchy:

$$\| u_{m_n(\varepsilon_n)} - u_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q(V)} \leq$$

$$\| u_{m_n(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n} - u_{m_n(\varepsilon_n)} \|_{L^q(V)} + \| u_{m_n(\varepsilon_n)}^{\varepsilon_n} - u_{m_k(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k} \|_{L^q(V)} + \| u_{m_k(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k} - u_{m_k(\varepsilon_k)} \|_{L^q(V)}$$

$$(13) \quad \leq C \varepsilon_n^\theta + \delta + C \varepsilon_k^\theta$$

$$\leq 2\delta$$

$$\therefore u_{m_j(\varepsilon_j)} \xrightarrow{L^q(V)} u$$

Q.E.D.

□